

**COMMENT OBTENIR UN SPECTRE SATISFAISANT
D'UN SIGNAL ENREGISTRÉ PAR ORDINATEUR?**

Soit une fonction $G(t)$ périodique, de fréquence f . D'après Fourier, cette fonction peut se décomposer en une somme de fonctions sinusoïdales de fréquence f_n multiples de f . Le spectre en fréquences de G est la représentation graphique de l'amplitude des fonctions sinusoïdales en fonction de la fréquence. Mathématiquement, on dit que le spectre en fréquences est la représentation graphique de la transformée de Fourier de G . La transformée de Fourier de la fonction G est la fonction $X(f)$ telle que:
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

Un certain nombre de logiciels proposent de calculer cette transformée de Fourier afin d'obtenir le spectre en fréquences d'un signal périodique mais l'ordinateur, n'ayant qu'un nombre fini de mots de taille finie :

- ne connaît pas toutes les valeurs de $G(t)$; l'ordinateur ne travaille que sur quelques valeurs discrètes de $G(t)$: la fonction temporelle $G(t)$ est discrétisée. C'est-à-dire que les valeurs de $G(t)$ ne sont connues que tous les $T_{ech} = \frac{1}{f_{ech}}$ avec f_{ech} : fréquence d'échantillonnage.
- ne peut pas calculer l'intégrale précédente sur $]-\infty; +\infty[$: la fonction temporelle $G(t)$ est tronquée.
- ne fournit pas toutes les valeurs de $X(f)$ mais uniquement certaines valeurs de $X(f)$: la fonction $X(f)$ est discrétisée.

On dit que l'ordinateur réalise une **Transformée de Fourier Rapide (TFR)** ou une **Fast Fourier Transform (FFT)** qui est un algorithme de calcul dont il existe plusieurs versions.

Objectif : Le but du TP est de comprendre comment le spectre en fréquences d'une fonction temporelle $G(t)$ peut être altéré par une FFT (ou TFR) suivant les paramétrages soit de saisie, soit d'analyse.. Le logiciel utilisé est Synchronie.

Se reporter au mode d'emploi pour faire calculer un spectre en fréquence par Synchronie.

Dans tout le TP, les mesures de fréquence sur les spectres en fréquence seront faites avec une précision de l'ordre de 0,1 Hz. Pour atteindre cette précision, utiliser l'outil zoom. Procéder ensuite à la mesure en utilisant l'outil réticule.

1. La discrétisation de la fonction temporelle $G(t)$ ou le problème de l'échantillonnage.

Lorsqu'il acquiert des signaux, le logiciel Synchronie échantillonne le signal. Le logiciel ne prélève la valeur du signal analogique qu'à intervalles de temps réguliers; c'est la période d'échantillonnage ($T_{ech} = \frac{1}{f_{ech}}$) qui est fixée dans les paramètres d'acquisition (*Paramètres Acquisition Durée Echantillon*).

- Régler le générateur de signaux afin qu'il délivre un **signal sinusoïdal** de fréquence $f = 40 \text{ kHz}$, bouton d'amplitude du signal à mi-course.

- A quel résultat doit-on s'attendre pour le spectre en fréquences de ce signal ?

- Relier le générateur à l'interface de l'ordinateur (bornes EA0 et masse).

Terminale S

- Ouvrir le logiciel Synchronie. Paramétrer l'acquisition (voir *Feuille Réponse*). Lancer l'acquisition (F10). Après chaque acquisition, :

- 1°) regarder l'allure de la courbe obtenue (fenêtre 1) en faisant varier le style d'affichage de la courbe (*Paramètres, Courbe, Style ...* ou \rightarrow)
- 2°) mesurer à l'aide du réticule la période du signal enregistré
- 3°) faire calculer le spectre du signal (Menu *Traitements, Analyse de Fourier, Signal à traiter EA0, Partie à traiter: Périodes*).

- Rassembler les résultats des différents cas dans le tableau de la feuille de réponses et répondre aux questions de la feuille réponses.

2. La résolution en fréquence du spectre ou le problème de l'échantillonnage de la fonction fréquentielle

Lorsque l'on demande au logiciel Synchronie d'afficher le spectre d'un signal, il le calcule par un algorithme qui permet un calcul rapide du spectre mais le calcul n'est effectué que pour certaines fréquences. Ces fréquences sont des multiples de la fréquence f_0 avec :

$$f_0 = \frac{1}{\text{Nbre points} \times T_{\text{éch}}} = \frac{1}{T_{\text{totale acquisition}}}$$

(Lorsqu'il calcule un spectre, le logiciel Synchronie affiche la valeur de f_0 dans le titre de la fenêtre du spectre: c'est l'indication *Résolution* indiquée en Hz).

On peut montrer qu'il en résulte alors un gain énorme en temps de calcul si le nombre d'échantillons est une puissance de 2 (1024, 2048, 4096 ..). En revanche, la discrétisation du spectre obtenu peut fausser les mesures si l'on ne prend pas certaines précautions. On se propose de mettre en évidence ce phénomène dans deux manipulations.

Pour ces deux manipulations on travaillera sur le son émis par des diapasons. Le son émis par un diapason a la caractéristique d'être **pur** c'est-à-dire que la variation de pression caractéristique de l'onde sonore est **sinusoïdale**. Les fichiers correspondants aux divers sons ont été enregistrés avant la séance.

Manipulation 1: spectre en fréquence du son émis par un diapason de 440 Hz. (fichiers *diapason 440 FFT 3,5 μs* et *diapason 440 FFT 48,8 μs*).

- Ouvrir le fichier *diapason 440 FFT 3,5 μs* . Relever les paramètres d'acquisition sur la feuille réponse
- Faire calculer le spectre du signal enregistré (partie à traiter: totalité). Indiquer le résultat. Mesurer la fréquence de la raie principale en zoomant suffisamment pour faire des mesures à 0,1 Hz près.
- Compléter le tableau réponse.
- **Fermer la fenêtre spectrale** puis ouvrir le fichier *diapason 440 FFT 48,8 μs* qui correspond à l'enregistrement du même son mais avec d'autres paramètres d'acquisition. Procéder aux mêmes mesures et compléter le tableau de la feuille réponses.

Manipulation 2: il s'agit de travailler sur les sons émis simultanément par deux diapasons: le diapason 1 vibre à 440 Hz, le diapason 2 vibre à 425 Hz (c'est un diapason de 440Hz qui a été légèrement dérégulé en positionnant une masselotte sur une des branches).

- Ouvrir le fichier *battements 440 et 425 FFT 48,8 μs*.
- Observer le signal temporel: il présente le phénomène de battement caractéristique de la superposition de deux vibrations de même amplitude mais de fréquences légèrement différentes.
- Faire calculer le spectre (sur la totalité du signal). Indiquer le résultat.
- Compléter le tableau de la feuille réponses.
- **Fermer la fenêtre spectrale** et faire le même travail avec le fichier *battements 440 et 425 FFT 32,6 μs*.

3. La troncature de la fonction temporelle $G(t)$ ou le problème de la fenêtre de la transformée de Fourier.

La transformée de Fourier d'un signal se calcule en théorie de $-\infty$ à $+\infty$. Or ce calcul est effectué en pratique à partir du signal contenu dans une fenêtre d'enregistrement supposée se répéter à l'infini. On se propose d'étudier l'influence de la fenêtre sur la forme du spectre en fréquence du signal que l'on veut analyser.

Manipulation 1 :

- Régler le GBF de façon à ce qu'il délivre un signal sinusoïdal de fréquence environ 500 Hz, ajuster le bouton d'amplitude à mi-course.
- Envoyer le signal du GBF sur l'interface de l'ordinateur (EA0 et masse).
- Dans le logiciel Synchronie régler les paramètres d'acquisition comme suit:
2048 points, $T_{\text{éch}} = 5 \mu\text{s} \Rightarrow T_{\text{totale}} = 10,24 \text{ ms}$
déclenchement \rightarrow EA0 \rightarrow niveau : 0 \rightarrow sens : indifférent
- Lancer une acquisition (F10).
- Modifier alors légèrement la fréquence et refaire un enregistrement : le but ici est d'obtenir une fin d'enregistrement correspondant le moins possible au début de l'enregistrement (si on collait bout à bout, on obtiendrait une sinusoïde se répétant à l'infini mais avec des brisures).
- Faire calculer le spectre du signal dans le logiciel Synchronie:
Paramètres FFT : signal \rightarrow EA0 \rightarrow Partie à traiter \rightarrow totalité
Vérifier que le filtre anti-repliement n'est pas activé dans les paramètres avancés et lancer le calcul .
- Indiquer le résultat obtenu pour le spectre du signal (reproduire grossièrement le résultat ci-dessous):
- Compléter le tableau de la feuille réponses.

Manipulation 2 :

- Modifier légèrement la fréquence du GBF afin d'obtenir une fin d'enregistrement correspondant le plus possible au début de l'enregistrement ce qui revient à avoir dans la fenêtre un nombre entier de périodes enregistrées (ainsi si on collait bout à bout l'enregistrement, on obtiendrait une sinusoïde se répétant à l'infini sans brisures).
- Faire calculer le spectre du signal avec le logiciel Synchronie avec les mêmes paramètres que dans la manipulation précédente.
- Compléter le tableau de la feuille réponses.

Manipulation 3 :

- Faire calculer le spectre du signal acquis lors de la manipulation 2 avec les mêmes paramètres mais en précisant dans le menu *Analyse de Fourier: Partie à traiter: Périodes*.
- Compléter le tableau de la feuille réponses.

4. Conclusions du TP

Répondre aux questions posées sur la feuille réponses

COMMENT OBTENIR UN SPECTRE SATISFAISANT D'UN SIGNAL ENREGISTRÉ PAR ORDINATEUR?

Pour aller plus loin : FFT et RMN

Le signal temporel RM est une sinusoïde amortie dont l'équation la plus générale est :

$$Y(t) = Y_0 \times \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \times \cos(2\pi f t + \phi_0)$$

Le paramètre τ , constante de temps du signal caractérise l'amortissement du signal. Plus la valeur de τ est faible, plus le signal s'amortit rapidement.

Le signal fréquentiel est la transformée de Fourier du signal temporel $Y(t)$. La largeur de la raie associée à la fréquence f est inversement proportionnelle à τ .

Donc, si le signal s'amortit rapidement, la valeur de τ est faible et la raie est « large »

On se propose de vérifier cette propriété.

I Calculs

Dans Synchronie, => Calcul, régler le nombre de points à 1000 (Menu déroulant Points).

Après avoir défini :

- Tau = 1/60
- f = 250
- Y1 = 5*EXP(-t/tau)* cos (2*Pi*f*t)
- Y2 = 5*EXP(-t/(3*tau))* cos (2*Pi*f*t)

Faire calculer (touche F2)

Revenir à la fenêtre graphique et faire afficher Y1 et Y2.

Faire calculer les FFT de Y1 et Y2 et faire afficher le résultat sous forme **d'une courbe continue** (voir ci-dessus)

I Observations : pour N= 100 points

- a) déterminer (à l'aide du réticule => *abscisse absolue*) l'abscisse du pic en fréquence et expliquer la valeur obtenue

pour Y1	pic	f ₁ =
pour Y2	pic	f ₂ =
- b) évaluer (à l'aide du réticule => *abscisse relative*) la largeur à mi-hauteur du pic

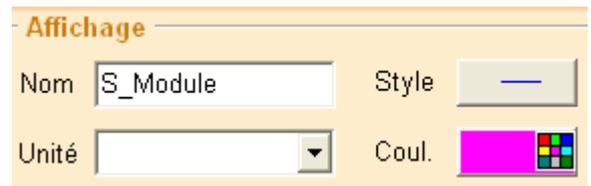
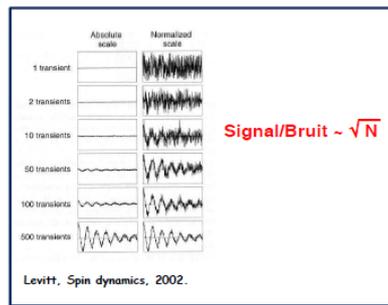
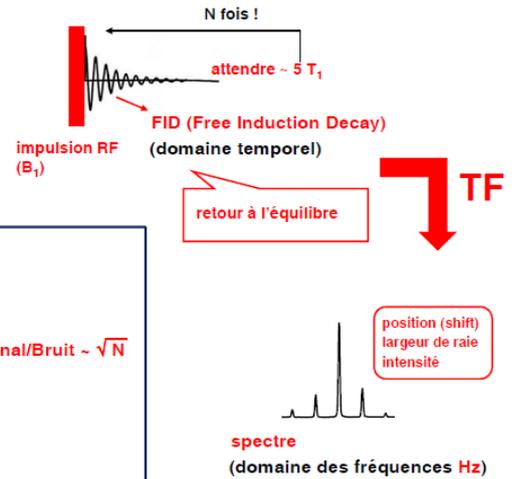
pour Y1	largeur à mi hauteur	Δf ₁ =
pour Y2	largeur à mi hauteur	Δf ₂ =
- c) Discuter des résultats pour les deux courbes Y1 et Y2 en vous servant des informations ci-dessus.

RMN impulsionnelle et par transformée de Fourier TF

l'idée :



R. Ernst



Refaire les mêmes opérations mais en faisant calculer Y1 et Y2 **pour N = 250 points**

Noter et interpréter les résultats

pour Y1 pic $f_1 = \dots\dots\dots$

pour Y2 pic $f_2 = \dots\dots\dots$

pour Y1 largeur à mi hauteur $\Delta f_1 = \dots\dots\dots$

pour Y2 largeur à mi hauteur $\Delta f_2 = \dots\dots\dots$