

**COMMENT OBTENIR UN SPECTRE SATISFAISANT
D'UN SIGNAL ENREGISTRÉ PAR ORDINATEUR?**

Correction

Soit une fonction $G(t)$ périodique, de fréquence f . D'après Fourier, cette fonction peut se décomposer en une somme de fonctions sinusoïdales de fréquence f_n multiples de f . Le spectre en fréquences de G est la représentation graphique de l'amplitude des fonctions sinusoïdales en fonction de la fréquence. Mathématiquement, on dit que le spectre en fréquences est la représentation graphique de la transformée de Fourier de G . La transformée de Fourier de la fonction G est la fonction $X(f)$ telle que:
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

Un certain nombre de logiciels proposent de calculer cette transformée de Fourier afin d'obtenir le spectre en fréquences d'un signal périodique mais l'ordinateur, n'ayant qu'un nombre fini de mots de taille finie :

- ne connaît pas toutes les valeurs de $G(t)$; l'ordinateur ne travaille que sur quelques valeurs discrètes de $G(t)$: la fonction temporelle $G(t)$ est discrétisée. C'est-à-dire que les valeurs de $G(t)$ ne sont connues que tous les $T_{ech} = \frac{1}{f_{ech}}$ avec f_{ech} : fréquence d'échantillonnage.
- ne peut pas calculer l'intégrale précédente sur $]-\infty; +\infty[$: la fonction temporelle $G(t)$ est tronquée.
- ne fournit pas toutes les valeurs de $X(f)$ mais uniquement certaines valeurs de $X(f)$: la fonction $X(f)$ est discrétisée.

On dit que l'ordinateur réalise une **Transformée de Fourier Rapide (TFR)** ou une **Fast Fourier Transform (FFT)** qui est un algorithme de calcul dont il existe plusieurs versions.

Objectif : Le but du TP est de comprendre comment le spectre en fréquences d'une fonction temporelle $G(t)$ peut être altéré par une FFT (ou TFR) suivant les paramétrages soit de saisie, soit d'analyse.. Le logiciel utilisé est Synchronie.

Se reporter au mode d'emploi pour faire calculer un spectre en fréquence par Synchronie.

Dans tout le TP, les mesures de fréquence sur les spectres en fréquence seront faites avec une précision de l'ordre de 0,1 Hz. Pour atteindre cette précision, utiliser l'outil zoom. Procéder ensuite à la mesure en utilisant l'outil réticule.

1. La discrétisation de la fonction temporelle $G(t)$ ou le problème de l'échantillonnage.

Lorsqu'il acquiert des signaux, le logiciel Synchronie échantillonne le signal. Le logiciel ne prélève la valeur du signal analogique qu'à intervalles de temps réguliers; c'est la période d'échantillonnage ($T_{ech} = \frac{1}{f_{ech}}$) qui est fixée dans les paramètres d'acquisition (*Paramètres Acquisition Durée Echantillon*).

- Régler le générateur de signaux afin qu'il délivre un **signal sinusoïdal** de fréquence $f = 40 \text{ kHz}$, bouton d'amplitude du signal à mi-course.

- A quel résultat doit-on s'attendre pour le spectre en fréquences de ce signal ?

- Relier le générateur à l'interface de l'ordinateur (bornes EA0 et masse). Ouvrir le logiciel Synchronie. Paramétrer l'acquisition (voir tableau ci-dessous). Lancer l'acquisition (F10). Après chaque acquisition, faire calculer le spectre du signal. Rassembler les résultats des différents cas dans le tableau ci-après

Paramètres d'acquisition à régler dans le logiciel Synchronie	Calcul de la fréquence d'échantillonnage F_{ech} (indiquer le calcul et le résultat)	Allure du signal acquis. Préciser la valeur de la période lue grâce aux réticules.	Allure du spectre en fréquences Préciser le nombre de pics observés ainsi que leur abscisse
200 points, durée échantillon: 200 μ s Fichier 40k 200 μ $\Delta t_{total} = 4,0 \cdot 10^{-2}$ s	5 kHz	Signal régulier ; T = 3,25 ms	Plusieurs pics le principal à 301 Hz
200 points, durée échantillon: 20 μ s Fichier 40k 20 μ $\Delta t_{total} = 4,0 \cdot 10^{-2}$ s	50 kHz	Battements T = 0,102 ms	Un pic à 9,75 kHz
200 points, durée échantillon: 10 μ s Fichier 40k 10 μ $\Delta t_{total} = 2,0 \cdot 10^{-3}$ s	100 kHz	Irrégulier T = 25 μ s Ou 50 μ s (!) pas clair !s	Plusieurs pics. Le principal à 40 kHz
200 points, durée échantillon: 200 ns Fichier 40k 200 n $\Delta t_{total} = 4,0 \cdot 10^{-6}$ s	5 MHz	Signal régulier T = 25 μ s	Un seul pic. à 40 kHz

Conclusions:

Faire réfléchir sur les premières situations : Rappel $f_{signal} = 40\text{kHz} \Leftrightarrow T_{signal} = 25 \mu\text{s}$

Situation 1 $T_{ech} = 200 \mu\text{s}$ $T_{signal} = 25 \mu\text{s}$ 1 point tous les 8 périodes ! donc la sinusoïde observée est un artefact car f_{signal} n'est pas exactement 40kHz

Faire des essais avec le fichier Excel CAN avec $f_{signal} = 40,3 \text{ kHz}$ et $f_{ech} = 5 \text{ kHz}$ ($T_{ech} = 200 \mu\text{s}$)

Phénomène de stroboscopie : $(n \cdot k + 1) T_{signal} = n T_{ech} = T_{app}$ avec ici $k = 8$ (because $T_{ech} = 200 \mu\text{s} = 8 \cdot T_{signal}$) $\Rightarrow f_{app} = f_{signal} - k f_{ech} = 300 \text{ Hz}$

Situation 2 $T_{ech} = 20 \mu\text{s}$: 1 point par période !

des essais avec le fichier Excel CAN avec $f_{signal} = 40,3 \text{ kHz}$ et $f_{ech} = 50000 \text{ kHz}$ ($T_{ech} = 200 \mu\text{s}$)

Phénomène de stroboscopie : $(n - 1) T_{signal} = n T_{ech} = T_{app} \Rightarrow f_{app} = f_{ech} - f_{signal} = 9,7 \text{ kHz}$

Situation 3 $T_{ech} = 10 \mu\text{s}$: 2 point par période ! (Critère Shannon respecté on retrouve le 40 kHz dans la FFT... mais « pollué » !)

Situation 4 $T_{ech} = 0,2 \mu\text{s}$: 12,5 points par période ! (Critère Shannon respecté)

- dans quel(s) cas l'allure du signal acquis est-elle satisfaisante? A 5 MHz d'échantillonnage

- dans quel(s) cas l'allure du spectre en fréquences est-elle satisfaisante? , on s'approche du résultat à partir de 100 kHz d'échantillonnage

- Le **critère de Shannon** indique la fréquence d'échantillonnage F_{ech} à choisir pour reconstituer convenablement le signal analogique à partir du signal échantillonné:

$F_{ech} > 2 f$. Que donne l'application du critère de Shannon dans le cas présent? $F_{ech} > 80 \text{ kHz}$

Vos différentes acquisitions vous permettent-elles de valider le critère de Shannon dans le cas présent? A peu près, à 100 kHz on est encore un peu limite

- D'après vos différentes acquisitions, quel peut être l'inconvénient de choisir une fréquence d'échantillonnage trop élevée? (ou si l'on choisit une fréquence d'échantillonnage trop élevée peut-on avoir à la fois une acquisition du signal et un spectre en fréquences satisfaisants?) Il faut choisir entre le spectre en fréquence et la représentation temporelle ; on ne peut pas avoir les 2 bien en même temps ; voir fin TP.

2. La résolution en fréquence du spectre ou le problème de l'échantillonnage de la fonction fréquentielle

Lorsque l'on demande au logiciel Synchronie d'afficher le spectre d'un signal, il le calcule par un algorithme qui permet un calcul rapide du spectre mais le calcul n'est effectué que pour certaines fréquences. Ces fréquences sont des multiples de la fréquence f_0 avec :

$$f_0 = \frac{1}{\text{Nbre points} \times T_{\text{éch}}} = \frac{1}{T_{\text{totale acquisition}}}$$

(Lorsqu'il calcule un spectre, le logiciel Synchronie affiche la valeur de f_0 dans le titre de la fenêtre du spectre: c'est l'indication *Résolution* indiquée en Hz).

On peut montrer qu'il en résulte alors un gain énorme en temps de calcul si le nombre d'échantillons est une puissance de 2 (1024, 2048, 4096 ..). En revanche, la discrétisation du spectre obtenu peut fausser les mesures si l'on ne prend pas certaines précautions. On se propose de mettre en évidence ce phénomène dans deux manipulations.

Pour ces deux manipulations on travaillera sur le son émis par des diapasons. Le son émis par un diapason a la caractéristique d'être pur c'est-à-dire que la variation de pression caractéristique de l'onde sonore est sinusoïdale. Les fichiers correspondants aux divers sons ont été enregistrés avant la séance.

Manipulation 1: spectre en fréquence du son émis par un diapason de 440 Hz. (fichiers *diapason 440 FFT 3,5 μ s* et *diapason 440 FFT 48,8 μ s*).

- Ouvrir le fichier *diapason 440 FFT 3,5 μ s* . Relever les paramètres d'acquisition. **2048 points, 3,5 μ s, 7,168 ms**

(lire le 3,5 μ s en faisant un zoom sur une partie de la courbe et mesurer, par ex, Δt pour pour 10 pts(car affichage des paramètres d'acquisition arrondi !)

- La représentation temporelle du signal est-elle satisfaisante? Si oui, justifier à l'aide du critère de Shannon.

Oui. $T = 444 \text{ Hz}$; $F_{\text{éch}} = 28 \text{ kHz} > 2 \times 440 \text{ Hz}$;

- Faire calculer le spectre du signal enregistré (partie à traiter: totalité). Indiquer le résultat. Mesurer la fréquence de la raie principale en zoomant suffisamment pour faire des mesures à 0,1 Hz près.

Plusieurs pics dont 1 principal à 418,5 Hz ;

- Le résultat du spectre est-il satisfaisant? Si non, expliquer en quoi il s'écarte du résultat attendu. Vérifier que la fréquence du pic central est un multiple de f_0 .

$f_0 = 139,5 \text{ Hz}$ indiquée dans Synchronie et se calcule avec paramètres acquisition

$$418,5 = 3 \times 139,5$$

Fermer la fenêtre spectrale puis ouvrir le fichier *diapason 440 FFT 48,8 μ s* qui correspond à l'enregistrement du même son mais avec d'autres paramètres d'acquisition. Procéder aux mêmes mesures.

Paramètres d'acquisition: **4096 points ; 48,8 μ s ; 199,9 ms**

Résultat du spectre. Expliquer pourquoi l'algorithme a pu cette fois-ci fournir un résultat satisfaisant (vérifier que dans ce cas, 440 Hz est un multiple de f_0).

Résolution 5 Hz ; 440 est un multiple de 5.

Fichier	Paramètres d'acquisition	Spectre obtenu	Résolution du spectre (Hz) Relation entre f_0 et les abscisses des pics sur le spectre
<i>diapason 440 FFT</i> 3,5 μ s	nombre de points: 2048 points durée échantillon: 3,5 μ s durée totale: 7,168 ms	Plusieurs pics dont... Abscisses du (ou des) principaux pics: 418,5 Hz Spectre satisfaisant: oui / non	$f_0 = 139,5$ Hz indiquée dans Synchronie et se calcule avec paramètres acquisition $418,5 = 3 \times 139,5$
<i>diapason 440 FFT</i> 48,8 μ s	nombre de points: 4096 points durée échantillon: 48,8 μ s ; durée totale: 199,9 ms	Abscisses du (ou des) principaux pics: 440 Hz Spectre satisfaisant: oui / non	$f_0 = 5$ Hz indiquée dans Synchronie et se calcule avec paramètres acquisition 440 est un multiple de 5

Expliquez pourquoi dans certains cas l'allure du spectre n'est pas satisfaisante:

Manipulation 2: il s'agit de travailler sur les sons émis simultanément par deux diapasons: le diapason 1 vibre à 440 Hz, le diapason 2 vibre à 425 Hz (c'est un diapason de 440Hz qui a été légèrement dérégulé en positionnant une masselotte sur une des branches).

- En théorie, quel doit être le spectre en fréquence du son enregistré? 2 pics un à 440 Hz et un à 425 Hz
- Ouvrir le fichier *battements 440 et 425 FFT 32,6 μ s*.
- Observer le signal temporel: il présente le phénomène de battement caractéristique de la superposition de deux vibrations de même amplitude mais de fréquences légèrement différentes.
- Faire calculer le spectre (sur la totalité du signal). Indiquer le résultat. Est-ce satisfaisant? Expliquer ce mauvais résultat à partir de la valeur de la résolution du spectre.

On observe 3 raies à 419,4 Hz, 434,4 Hz et 449,3 Hz. Résolution 15 Hz. 440 et 425 ne sont pas des multiples de 15.

- Ouvrir le fichier *battements 440 et 425 FFT 48,8 μ s*.
- Observer le signal temporel puis faire calculer le spectre (sur la totalité du signal). Indiquer le résultat. Est-ce satisfaisant? Expliquer ce bon résultat à partir de la valeur de la résolution du spectre.

On observe 2 raies à 425,2 Hz et 440,3 Hz. Résolution 5 Hz. 440 et 425 sont des multiples de 5.

3. La troncature de la fonction temporelle $G(t)$ ou le problème de la fenêtre de la transformée de Fourier.

La transformée de Fourier d'un signal se calcule en théorie de $-\infty$ à $+\infty$. Or ce calcul est effectué en pratique à partir du signal contenu dans une fenêtre d'enregistrement supposée se répéter à l'infini. On se propose d'étudier l'influence de la fenêtre sur la forme du spectre en fréquence du signal que l'on veut analyser.

Manipulation 1 :

- Régler le GBF de façon à ce qu'il délivre un signal sinusoïdal de fréquence environ 500 Hz, ajuster le bouton d'amplitude à mi-course.

- Envoyer le signal du GBF sur l'interface de l'ordinateur (EA0 et masse).

- Dans le logiciel Synchronie régler les paramètres d'acquisition comme suit:

2048 points, Téch = 5 μ s \Rightarrow Ttotale = 10,24 ms

déclenchement \rightarrow EA0 \rightarrow niveau : 0 \rightarrow sens : indifférent

- Lancer une acquisition (F10).

- Modifier alors légèrement la fréquence et refaire un enregistrement : le but ici est d'obtenir une fin d'enregistrement correspondant le moins possible au début de l'enregistrement (si on collait bout à bout, on obtiendrait une sinusoïde se répétant à l'infini mais avec des brisures).

- Vérifier que la représentation temporelle du signal est satisfaisante et justifier à l'aide du critère de Shannon.

Voir fichier 543 Hz totalité. La représentation temporelle du signal est bonne ; Fech = 200 kHz $>$ 2 x 543 Hz.

- Faire calculer le spectre du signal dans le logiciel Synchronie:

Paramètres FFT : signal \rightarrow EA0 \rightarrow Partie à traiter \rightarrow totalité

Vérifier que le filtre anti-repliement n'est pas activé dans les paramètres avancés et lancer le calcul .

- Indiquer le résultat obtenu pour le spectre du signal (reproduire grossièrement le résultat ci-dessous):

On observe plusieurs pics mais aucun à 543 Hz.

- Indiquer en quoi le résultat obtenu s'éloigne du résultat attendu.

Manipulation 2 :

- modifier légèrement la fréquence du GBF afin d'obtenir une fin d'enregistrement correspondant le plus possible au début de l'enregistrement ce qui revient à avoir dans la fenêtre un nombre entier de périodes enregistrées (ainsi si on collait bout à bout l'enregistrement, on obtiendrait une sinusoïde se répétant à l'infini sans brisures).

Voir fichier 480 Hz totalité ;

- Faire calculer le spectre du signal avec le logiciel Synchronie avec les mêmes paramètres que dans la manipulation précédente.

- Reproduire ci-dessous le résultat observé dans la fenêtre et indiquer pourquoi le résultat est satisfaisant.

Un pic à 488,3 Hz

Afin de remédier au problème mis en évidence ici, le logiciel Synchronie propose aussi de calculer le spectre sur un nombre entier de périodes du signal (Menu *Analyse de Fourier, Partie à traiter*, cliquer sur *Périodes*).

- Reprendre la manipulation 1 en appliquant ce protocole. Observer le changement d'allure du spectre.

4. Conclusion du TP

Récapituler les trois précautions à prendre pour obtenir un enregistrement temporel et un spectre en fréquence satisfaisants avec le logiciel Synchronie.

- 1) $F_{\text{éch}} > 2 f$ (critère de Shannon)
- 2) Calculer spectre sur un nombre entier de périodes (et donc pas la totalité du signal mais la plus grande partie correspondant à une durée qui soit un multiple entier de la période) en effet

Si fréquence f_0 , fréquence d'échantillonnage de la FFT :

$$f_0 = \frac{1}{\text{Nbre points} \times T_{\text{éch}}} = \frac{1}{T_{\text{totale acquisition}}}$$

Donc si $T_{\text{totale acquisition}} = k T \Rightarrow f_0 = (1/k) f \Leftrightarrow f = k .f_0$ et donc la FFT « passera » par la fréquence (au moins la fréquence fondamentale et par conséquent les fréquences harmoniques) du signal

Rem : Amélioration possible : que le nombre de points correspondant à la « fenêtre » sur laquelle on fait exécuter la FFT (donc un nombre entier de périodes) soit une puissance de 2, ce qui améliore l'efficacité de l'algorithme de FFT (qui procède par dichotomie)

- 3) Veiller à la résolution du spectre. donc essayer d'avoir f_0 le plus petit possible pour augmenter les chances de « passer » sur les fréquences du signal ('obtenues par la FFT) sinon certaines fréquences peuvent disparaître si elles ne sont pas des multiples de l'incrément (f_0) en fréquence de la FFT

Montrer que, malheureusement, les conditions à respecter pour avoir une bonne résolution en fréquence ne sont pas compatibles avec celles pour obtenir une bonne représentation temporelle (critère de Shannon).

Pour avoir une bonne résolution en fréquence, il faut avoir un f_0 le plus faible possible (pour avoir le plus de chance de respecter la condition $f = k .f_0$) donc , si le nombre de points est fixe, un temps d'échantillonnage relativement élevé, soit une fréquence d'échantillonnage assez faible, ce qui est contradictoire avec le critère de Shannon.