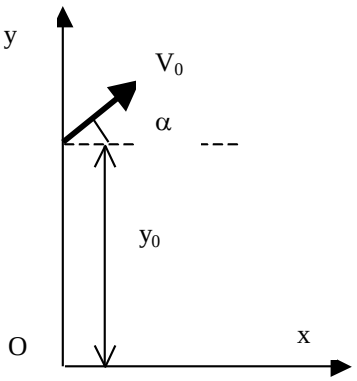
Résumé sur la chute :

I Chute libre

1) conditions de la chute libre : vitesse dans une direction quelconque
(*en négligeant frottement et poussée d'Archimède*)



2) bilan de forces : uniquement $\vec{P}$

3)Etude dynamique

Choix d'un repère : repère terrestre ⇔ ***galiléen***

(Base $(\vec{i},\vec{j})$ dans le plan vertical contenant $\vec{V}_0$)

Choix du système étudié : l'objet en chute S = {m}

PFDFD => $\Sigma \vec{f}_e = m.\vec{a} = \vec{P}$ => $\vec{a} = \vec{g}$

Équation horaire : projection du PFDLD sur les axes =>

$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g_y \end{cases}$ => par intégration => $\vec{v} \begin{cases} v_x = Cste \\ v_y = g_y\, t\, . + Cste \end{cases}$ (avec g_y = -g dans le repère choisi)

conditions initiales => $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ et $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$

par intégration => $\begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha).t + Cste \\ y = \frac{1}{2} g_y t^2 + (v_0 \sin\alpha).\, t + Cste \end{cases}$ soit $\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha).t + x_0 \\ y = \frac{1}{2} g_y t^2 + (v_0 \sin\alpha).\, t + y_0 \end{cases}$

(***Attention : toutes les grandeurs sont des valeurs algébriques*** : ***bien tenir compte du référentiel choisi***

Équation de la trajectoire : en éliminant t ($x_0 = 0$ *dans le cas ci-dessus*): $y = \frac{1}{2} g_y \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + x \tan\alpha + y_0$ <=> parabole

4) Etude du sommet S

Méthode A : par les équations horaires

En S : $v_y = 0$ => $t_S = -\frac{v_0 \sin\alpha}{g_y}$ => $x_S = -\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2.g_y}$ (***avec le repère choisi $g_y = -g$***) => y_S = ? (compliqué)

Méthode B : théorème de l'E_K pour avoir y_S directement

En M_0 : y_0 v_0

En S : y_S $v_s = v_0 \cos\alpha$ $\Delta E_K = \frac{1}{2} m.\, v_0^2 (\cos^2\alpha - 1) = m\, g_y\, (y_S - y_0)$ => $(y_S - y_0) = -\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2.g_y}$

5) Portée P (en admettant y_0 =0)

$x_P = 2\, x_S = -\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g_y}$

- pour $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ => $\sin 2\alpha' = \sin 2\alpha$ donc ***deux angles complémentaires ont même portée***
- ***portée maximale*** pour $\sin 2\alpha = 1$ => $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ => $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{4}}$

II Chute avec frottement

Il faut faire très attention au problème de signe

$\vec{F}_{frottement} = -\, h\, .\, \vec{v}$	$\vec{F}_{frottement} = -\, h\, .v.\, \vec{v}$
PFDFD => $\Sigma \vec{f}_e = m.\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{frottement}$ => $\vec{a} = \vec{g} - \frac{h}{m}\vec{v} = \vec{g} - (\frac{1}{\tau})\vec{v}$	PFDFD => $\Sigma \vec{f}_e = m.\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{frottement}$ => $\vec{a} = \vec{g} - \frac{h}{m} v.\, \vec{v}$
$\vec{a} \begin{cases} a_x = -(\frac{1}{\tau}).v_x \\ a_y = g_y - (\frac{1}{\tau}).v_y \end{cases}$ => $\vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha .\, \exp(-t/\tau) \\ v_y = \tau.g_y + (v_0 \sin\alpha - \tau.g_y).\exp(-t/\tau) \end{cases}$ => $\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = \tau .\, v_0 \cos\alpha .\, [1 - \exp(-t/\tau)] + x_0 \\ y = \tau.\{g_y\, t + (v_0 \sin\alpha - \tau.g_y).[1 - \exp(-t/\tau)]\} + y_0 \end{cases}$	*Ne peut être résolu dans une étude de chute à deux dimensions mais il existe une solution analytique dans le cas de la chute uniquement verticale*

Rem : Il convient de savoir résoudre pour le cas de la force de frottement en - h . $\vec{v}$ puisque l'on a uniquement affaire à des équations différentielles du premier ordre.

Pour intégrer la chute à une dimension avec f = - h.v²

(*dans le cas de l'étude à une dimension sans vitesse initiale et y'y dirigé vers le bas* => $v_y = v$):

$$mg - h v^2 = m\frac{dv}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{h}{m}v^2 = g(1-\beta^2 v^2) \text{ avec } \beta^2 = \frac{h}{mg} = \frac{1}{g.\tau} = \frac{1}{v_{lim}^2} \quad \text{(y'y dirigé vers le bas)}$$

$$\frac{dv}{dt} = g\,.\,(1-\beta^2 v^2)\,. \qquad \text{Rem : } \beta\, g = \sqrt{\frac{g}{\tau}}$$

$$\text{en séparant les variables : } \frac{dv}{(1-\beta^2 v^2)} = g.dt$$

$$\text{en décomposant le terme facteur de dv : } \frac{1}{(1-\beta^2 v^2)} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+\beta v)} + \frac{1}{(1-\beta v)}\right]$$

$$\text{soit à intégrer : } dv\left[\frac{1}{(1+\beta v)} + \frac{1}{(1-\beta v)}\right] = 2\,g.dt$$

$$\text{Ln}\frac{(1+\beta v)}{(1-\beta v)} = 2\,\beta\,g\,t$$

$$\frac{(1+\beta v)}{(1-\beta v)} = \exp(2\,\beta\,g\,t)$$

$$v = \left(\frac{1}{\beta}\right)\frac{\exp(2\,\beta\,g\,t) - 1}{\exp(2\,\beta\,g\,t) + 1}$$

$$v = \left(\frac{1}{\beta}\right)\frac{\exp(\beta\,g\,t) - \exp(-\beta\,g\,t)}{\exp(\beta\,g\,t) + \exp(-\beta\,g\,t)}$$

$$\boldsymbol{v = v_{lim}\ tanh\,(\beta\,g\,t)\ \ avec\ \beta\,g = \sqrt{\frac{g}{\tau}}\ \ donc\ \frac{1}{\beta} = v_{lim} = \sqrt{g.\tau}}$$

Soit en développant tanh (β g t) si (β g t) petit (tanh x = x $-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5$… si x petit)

$$tanh(\beta\,g\,t) = (\beta\,g\,t) - \frac{(\beta\,g\,t)^3}{3} + \frac{2}{15}(\beta\,g\,t)^5$$

$$\text{soit } \left(\frac{1}{\beta}\right)\ tanh(\beta\,g\,t) = (g\,t) - \beta^2\frac{(g\,t)^3}{3} + \frac{2}{15}\beta^4(g\,t)^5$$

$$\text{soit enfin puisque } (\beta\,g)^2 = \frac{g}{\tau} \text{ et encore } (\beta\,g)^4 = \left(\frac{g}{\tau}\right)^2$$

$$\textbf{Rem : si } (\beta\,g\,t) \textbf{ petit } v = g.t - \frac{1}{3}\frac{g^2}{\tau}t^3 + \frac{2}{15}\frac{g^3}{\tau^2}.t^5$$