Mesures, incertitude et chiffres significatifs

INCERTITUDE ABSOLUE, INCERTITUDE RELATIVE

1) définitions

De façon générale, soit une grandeur X à mesurer (ou à calculer à partir d'autres grandeurs mesurées) :

$$X = X_e \pm U(X)$$

X_e est ***l'estimation de la grandeur X***,

$U(X)$ est ***l'incertitude absolue sur X_e*** : elle a la même unité que X et signifie que : $X_e - U(X) <= X <= X_e + U(X)$

$\frac{U(X)}{X_e}$: est ***l'incertitude relative sur X_e*** : elle n'a pas d'unité ($100 \times \frac{U(X)}{X_e}$: donne l'incertitude relative en pourcentage)

U(X) dépend de l'instrument de mesure, des conditions opératoires, du traitement statistique, si la mesure de X a été répétée plusieurs fois ou du traitement mathématique si X est une grandeur calculée à partir d'autres grandeurs mesurées.

*Remarque : une étude statistique pour la détermination de **U(X)** permet de définir le taux de confiance que l'on peut accorder pour que la valeur exacte de la grandeur mesurée soit dans l'intervalle $X_e - U(X) <= X <= X_e + U(X)$ voir **document annexe I***

2) règles d'écriture

En notation scientifique, la valeur estimée et l'incertitude absolue d'une grandeur doivent être écrites avec la même puissance de 10 (et la même unité !) (et un nombre de chiffres significatifs cohérents)

Exemples : $C = (1{,}00 \pm 0{,}02) \times 10^{-2}$ mol.L^{-1} h = (1,70 ± 0,01) m ....***et pas*** 1,70 m ± 1 mm par ex

ESTIMATEUR DE :

A) LA VALEUR D'UNE GRANDEUR

1) lors d'un mesurage unique

X_e = la mesure lue ou affichée

2) lors de plusieurs mesurages (étude statistique)

En admettant que la même grandeur a été mesurée dans les mêmes conditions (matériel et protocole) :

En classe de Première S et Terminale S, on admettra que le meilleur estimateur de valeur d'une grandeur est la moyenne arithmétique.

B) L'INCERTITUDE ABSOLUE SUR UNE GRANDEUR

En 1S et TS, on admettra que l l'incertitude absolue est de la forme : U(G) = k . u(G)
Avec u : incertitude-type et k : facteur d'élargissement associé à un intervalle de confiance

1) lors d'un mesurage unique

α) ***avec un instrument gradué*** $u(X) = \frac{1}{\sqrt{12}}$ ***(la plus petite graduation)***

Remarque : le $\sqrt{12}$ est obtenu par un calcul statistique hors programme de Première S (voir Activité 1S : $\sqrt{12}$)

Exemples : règle graduée au mm => u(d) = 0,3 mm burette graduée au 1/10ème de mL => u (V) = 0,03 mL

Dans le cas d'une double lecture, par exemple, lors du repérage de la position d'une lentille et de l'écran sur lequel se fait une image nette, on fait deux lectures sur le banc optique pour avoir d : la distance lentille ⇔ image, l'incertitude type est alors une incertitude « composée » et $u(d) = \sqrt{u^2_1 + u^2_2}$ avec $u_1 = u_2 = \frac{1}{\sqrt{12}}$ (la plus petite graduation)

$$\text{donc } u(d) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ (la petite graduation)}$$

Le $\sqrt{12}$ dépend de la nature de la loi statistique retenue (loi uniforme) ; il peut devenir $\sqrt{24}$ si on change de loi statistique (loi triangulaire) : ce problème est étudié en Terminale S (voir Activité TS : $\sqrt{12}$ ou $\sqrt{24}$?)

β) ***avec un instrument à affichage digital***

Il n'y a pas de règle absolue et il convient de lire la documentation constructeur de l'instrument considéré.

2) *lors de plusieurs mesurages (étude statistique)*

En admettant que la même grandeur a été mesurée ***n fois*** dans les mêmes conditions (matériel et protocole) :

On admettra que le meilleur estimateur de ***l'incertitude type*** est ***l'écart type d'échantillon divisé par*** $\sqrt{n}$

$$u(X) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Rem 1 : pour la formule correspondant au calcul détaillée de cette grandeur, voir le ***document annexe I***
Rem 2 : Il convient de savoir faire le calcul de l'écart type sur votre calculatrice, avec la calculette Windows et dans Excel

INCERTITUDE ABSOLUE ET NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS

1) *Ecriture d'une valeur numérique en sciences expérimentales*

En sciences expérimentales, quand la valeur d'une grandeur est écrite sans écriture explicite de l'incertitude absolue, l'écriture du nombre rend compte de façon implicite de l'incertitude absolue.

Exemples : L = 1,0 m signifie que U(L) = 0,05 m ou encore L = (1,00 ± 0,05) m
alors que L = 1,00 m signifie que U(L) = 0,005 m ou encore L = (1,000 ± 0,005) m
Dans le premier exemple, L comporte deux chiffres significatifs et dans le deuxième 3 chiffres significatifs ; de façon générale, l'incertitude absolue porte au niveau du dernier chiffre significatif.

2) *Règles pour les chiffres significatifs d'une valeur écrite en notation scientifique (id est : mantisse x $10^{exposant}$)*

Il y a quatre règles pour déterminer les chiffres significatifs:

1. ***Les chiffres significatifs ne concernent que la mantisse***
2. ***Les chiffres différents de zéro sont toujours significatifs***
3. ***Les zéros à gauche ne sont jamais significatifs.***
4. ***Les zéros à droite sont toujours significatifs.***

Exemples : Soit la masse m = 1,660540 × 10^{-27} kg. Ce nombre est correctement écrit en notation scientifique et il comporte 7 chiffres significatifs. Le nombre de chiffres significatifs ne serait pas modifié si ce nombre était écrit sous les formes m = 0,01660540 10^{-25} kg. ou encore m = 166,0540 × 10^{-29} kg

Soit une substance chimique en solution de concentration centimolaire : cette concentration molaire suivant qu'elle est écrite C = 0,01 mol.L^{-1} ou C = 0,00100 mol.L^{-1} ***n'a pas la même précision*** puisque dans le premier cas cela signifie qu'elle est connue avec 1 chiffre significatif et dans le deuxième cas avec 3.
D'ailleurs dans le cas où cette concentration molaire est connue à 1% près, il est préférable d'écrire :
C = 1,00 × 10^{-2} mol.L^{-1} écriture correcte relativement à la notation scientifique et au respect des chiffres significatifs.

3) *Choix du nombre de chiffres significatifs dans l'écriture d'une valeur numérique*

a) *dans le cas d'une grandeur mesurée*

Pour une grandeur mesurée, le nombre de chiffres significatifs est déterminé par l'incertitude absolue sur cette grandeur. L'incertitude absolue s'exprime au maximum avec deux chiffres significatifs.

Remarque : de façon générale, l'incertitude absolue est écrite avec, au maximum, deux chiffres significatifs ; la valeur estimée et l'incertitude d'une grandeur doivent écrites avec un nombre de chiffres significatifs cohérent.
Exemples : Soit une intensité électrique mesurée de valeur I = 1,607 mA = 1,607 × 10^{-3} A (affichage d'un appareil digital par ex) et le constructeur indique ΔI = 0,03 mA. Il faut don écrire : I = 1,61 ± 0,03 mA = (1,61 ± 0,03) × 10^{-3} A

b) *dans le cas d'une grandeur calculée*

On applique alors un principe de base :

Un résultat ne peut être plus précis que les données qui ont servi à le calculer.

Mais ce principe de base dépend des conditions dans lesquelles le calcul doit être fait :

- Soit on connaît les incertitudes sur toutes les grandeurs entrant dans la formule de calcul et alors on peut déterminer l'incertitude sur la grandeur calculée (voir ***document annexe II***)
- Soit on connaît uniquement les valeurs des grandeurs entrant dans la formule de calcul, chacune avec un certain nombre de chiffres significatifs qui est généralement différent pour chaque grandeur et il convient de déterminer le nombre de chiffres significatifs avec lequel on va exprimer le résultat
  Ce dernier cas correspond à la situation la plus courante rencontrée dans la résolution d'un exercice ou d'un problème : on adoptera alors quelques règles empiriques.

Suivant le type d'opération faite, on adoptera les ***règles empiriques suivantes*** :

Remarque : Il s'agit bien de règles empiriques visant à éviter des calculs sophistiqués

a) dans le cas d'une multiplication ou d'une division :
Le résultat sera exprimé avec le même nombre de chiffres significatifs que la moins précise des données.

Exemple 1 :
Par des mesures spectroscopiques, on mesure la longueur d'onde d'une radiation lumineuse soit λ = 0,5345 µm. Quelle est la fréquence N de cette radiation dans le vide ?

$N = C/\lambda = 5{,}607476636 \times 10^{14}$ Hz (à la calculette : 10 chiffres à l'affichage)

soit $5{,}607 \times 10^{14}$ Hz avec 4 chiffres significatifs comme λ car il est implicite que C, la célérité de la lumière dans le vide, est connue avec une très grande précision.

Exemple 2:
On prépare une solution de soude en diluant m = 4,00 g de soude dans une fiole de 500 mL. Quelle est la concentration molaire de la solution obtenue ? (Donnée : la masse molaire de la soude M = 40,00 g/mol)

$C = m/(M.V) = 2\ ?\ ?\ ?\ ?\ ? \times 10^{-1}$ mol/L

Dans ce calcul, il est implicite – car on doit légitimement attendre d'un lycéen qu'il sache que la verrerie employée est alors une fiole jaugée de 500 mL - que le volume V de 500 mL est connue avec une précision supérieure à celle de la masse dissoute de même que la masse molaire de la soude : il s'ensuit que la concentration molaire doit s'exprimer avec le même nombre de chiffres significatifs que m d'où C = = $2{,}00 \times 10^{-1}$ mol/L.

b) dans le cas d'une addition ou soustraction : Un petit calcul est nécessaire...

1) ***on écrit le plus grand des opérandes en écriture scientifique***
2) ***on écrit les autres nombres en écriture scientifique en adaptant la puissance sur celle du plus grand nombre***
3) ***on fait l'opération voulue (addition ou soustraction)***
4) ***on exprime le résultat avec le même nombre de décimales que l'opérande ayant le plus petit nombre de décimales après la transformation 2)***

... en arrondissant ou en tronquant suivant la décimale suivante

Exemple (sur addition) :
Soit un objet envoyé en colis express par la poste dont la masse est m = 1,26 kg (3 chiffres significatifs donc m est mesurée à 5 g près). On place cet objet dans un carton de masse m' = 82 g (2 chiffres significatifs donc m' est mesurée à 0,5 g près). Quelle est la masse M du paquet ? M = m + m' = 1342 g mais combien garde-t-on de chiffres significatifs ?

Règles de calcul
1) le plus grand nombre : 1,26 (x 10^0 implicite)
2) l'autre nombre : 0,082 (écrit avec la même puissance : x 10^0 implicite)
3) la somme : 1,342
4) les deux opérandes 1,26 : deux décimales 0,082 : trois décimales
=> résultat exprimé avec deux décimales
soit 1, 34 kg (dernier chiffre 4 puisque suivant 2 donc troncature)

c) Dans le cas d'une fonction :
Le résultat sera exprimé avec le même nombre de chiffres significatifs que l'argument*

**** Ceci est une règle empirique très simplificatrice mais suffisante en 1S et TS.***

Exemple : L'étude expérimentale de la réfraction limite lors du passage d'un dioptre d'un milieu d'indice relatif n à l'air donne un angle i_{lim} = 72,0 ° Que vaut l'indice n du milieu incident ?
L'indice n est défini par la relation $n = 1/\sin(i_{lim})$ n = 1,05146 Mais combien faut-il garder de chiffres significatifs ?
i_{lim} = 72,0 ° => trois chiffres significatifs donc n = 1,05

Annexe I sur la mesure et son traitement statistique :

Estimations statistiques de X_e et $u(X)$:

Soit une grandeur ***X*** (par exemple masse, volume, etc.),
mesurée ***n*** fois (de façon indépendante et dans les mêmes conditions - même instrument de mesure, protocole, etc.-)
et soient les différentes mesures $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$

On appelle x_{moy}, la moyenne des résultats obtenus calculée suivant la formule :

$$\mu \text{ (ou } \overline{x}\text{)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

(x_{moy} étant représenté par µ ou x barre et ***n*** représentant le nombre de mesures)
ainsi que ***<u>l'écart type d'échantillon</u>*** s (ou σ_{n-1}) calculé suivant la formule :

$$s \text{ (ou } \sigma_{n-1}\text{)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

En classe de Première S et Terminale S on considèrera que :

$$X = X_e \pm U(X)$$

Avec $U(X) = k \cdot u(X)$ $X_e = \mu$ ***et*** $u(X) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$

On prendra comme valeur du facteur d'élargissement k :
En Première S, k = 1 En Terminale S, k = 2

A vrai dire, la valeur de k dépend de l'intervalle de confiance retenu et le nombre de mesures faites (voir l'annexe Loi de Student) . Les choix des valeurs de k sont donc arbitraires ils correspondent, par exemple, pour la classe de Terminale S à un intervalle de confiance d'environ 95%

Attention ; les formules ci-dessus <u>ne sont pas à connaître</u> mais
.. il faut savoir faire les calculs de ces grandeurs :

1) ***sur votre calculatrice***
2) ***dans le logiciel EXCEL***
3) *éventuellement sur la calculatrice dans les accessoires Windows*

Avec votre calculatrice : ***lire la documentation de VOTRE calculatrice pour calculer moyenne et écart-type***

Avec Excel : formules de calcul

Fonction moyenne …= Moyenne(………….)

Fonction ecartype …= ecartype(……..) (*attention de ne pas prendre* ***ecartypep(..)*** *qui est l'écart-type de population)*

Avec la calculatrice de Windows (dans les Accessoires)

Activer les fonctions de statistiques de la calculatrice (Windows 95, 98, 98 SE, ME, XP etc.)

la calculatrice de Windows possède des fonctions avancées de statistiques (moyenne, ecart-type, etc ..)

Pour profiter pleinement de ces fonctionnalités, vous devez tout d'abord être en mode "scientifique", ce qui est le cas après avoir sélectionné l'option "Scientifique" dans le menu "**Affichage**".

Passons à l'entrée des données :

- Tapez votre première donnée.
- Cliquez sur Sta, puis ignorez la fenêtre qui apparait et cliquez sur Dat (sur la calculatrice).
- Tapez vos autres données en cliquant sur Dat après avoir entré chacune d'entre elles.

Lorsque vous avez terminé, cliquez une dernière fois sur **Sta**. Vous pouvez à présent cliquer sur le bouton de la fonction statistique que vous souhaitez utiliser. (Moyenne = Average, ecart-type = s)

Annexe II sur la mesure et son traitement statistique :

<u>*Calcul d'incertitude sur une grandeur calculée*</u> ***(connaissant les incertitudes sur les opérandes)***

Il convient alors de prendre en compte la nature de l'opération effectuée sur les données : celle-ci modifie la façon avec laquelle les incertitudes se propagent.
Nous envisageons ci-dessous les opérations les plus courantes rencontrées au niveau du lycée.

Soient les symboles suivants :

x; , le résultat du calcul permettant de calculer la grandeur X qui est une fonction des paramètres a, b etc
a, b & c; les paramètres permettant de calculer x (a, b et c doivent être des ***grandeurs indépendantes***)
s_x; l'écart type sur x
s_a, s_b & s_c; les écart types sur les paramètres a, b et c.

Opération	***Calcul de l'incertitude***
$x = a + b - c$	$s_x = \sqrt{s_a^2 + s_b^2 + s_c^2}$
$x = a \times b / c$	$s_x = x\ .\sqrt{(\frac{s_a}{a})^2 + (\frac{s_b}{b})^2 + (\frac{s_c}{c})^2}$
La puissance (en admettant qu'il n'y a pas d'incertitude sur le degré b) $x = a^b$	$s_x = x\ .b\ .\frac{s_a}{a}$
Le logarithme a) de base e : $x = \text{Ln } a$ b) de base 10 : $x = = \log_{10} a$	$s_x = \frac{s_a}{a}$ $s_x = 1/\text{Ln}(10) \times \frac{s_a}{a}$
L'exponentielle a) de base e : $x = e^a$ b) de base 10 $x = 10^a$	$s_x = x\ .\ s_a$ $s_x = \text{Ln}(10)\ .\ x\ .\ s_a$

Exemple
Pour doser un acide, on prend une prise d'essai d'un volume V_a = 20,00 mL que l'on dose par une base forte de concentration $C_b = 1{,}00 \times 10^{-2}$ mol.L^{-1}. A l'équivalence, on trouve un volume $V_{b\,E}$ = 17,8 mL. Que vaut la concentration de l'acide C_a ?
Soient les symboles suivants :

X = C_a , ***a*** = C_b ***b*** = $V_{b\,eq}$ ***c*** = V_a
s_x; l'incertitude sur x s_a, = $0{,}005 \times 10^{-2}$ mol.L^{-1} s_b = 0,0.5 mL s_c; = 0,005 mL

$$s_x = x\cdot\sqrt{\left(\frac{s_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{s_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{s_c}{c}\right)^2 + \ldots\ldots}$$

$s_x^2 = (8,90 \times 10^{-3})^2 \times \{(0{,}005/1)^2 + (0{,}05/17{,}8)^2 + (0{,}005/20)^2\}$ => $s_x \approx 0{,}05 \times 10^{-3}$ mol.L^{-1}

Rappel : le calcul grossier (règle empirique sur produit et division) aurait donné :
$C_a = C_b \times V_{B\,E} / V_a$
$= 1{,}00 \times 10^{-2} \times 17{,}8 / 20{,}00 = 8{,}90 \times 10^{-3}$ mol.L^{-1} (3 chiffres significatifs comme la moins précise des données)
la règle empirique suffit à trouver le bon ordre de grandeur de l'incertitude absolue !

Annexe III sur la mesure et son traitement statistique :

Loi de Student

Une approche plus élaborée pour l'estimateur de l'incertitude absolue :
Le calcul statistique montre que l'on peut définir l'incertitude absolue U(X) :

$$U(X) = t \, . \, \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

dans laquelle t représente une variable qui suit une loi statistique précise appelée loi de Student à (N – 1) degré de liberté.

Intervalle de confiance :
En admettant que toute incertitude systématique a été écartée, on peut définir un intervalle de confiance de la forme :

X_e - U(X) <= X <= X_e + U(X) ***associé à un niveau de confiance donné (à x %)***

Par exemple (pour un nombre de mesures N différent de 10 , voir la table ci-dessous) :
Les tables statistiques donnent pour N =10 mesures:
pour un niveau de confiance de 95 % : t = 2,26
pour un niveau de confiance de 99 % : t = 3,25

Loi de Student
Pour N mesures et l'intervalle à X %, on trouve la valeur du coefficient t :

N mesures	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
degré liberté	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
à 90 %	6,31	2,92	2,35	2,13	2,02	1,94	1,89	1,86	1,83	1,81
à 95 %	12,71	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,23
à 99 %	63,66	9,92	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25	3,17

N mesures	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
degré liberté	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
à 90 %	1,80	1,78	1,77	1,76	1,75	1,75	1,74	1,73	1,73	1,72
à 95 %	2,20	2,18	2,16	2,14	2,13	2,12	2,11	2,10	2,09	2,09
à 99 %	3,11	3,05	3,01	2,98	2,95	2,92	2,90	2,88	2,86	2,85

N mesures	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
degré liberté	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
à 90 %	1,72	1,72	1,71	1,71	1,71	1,71	1,70	1,70	1,70	1,70
à 95 %	2,08	2,07	2,07	2,06	2,06	2,06	2,05	2,05	2,05	2,04
à 99 %	2,83	2,82	2,81	2,80	2,79	2,78	2,77	2,76	2,76	2,75

Les valeurs ci-dessus ont été obtenues en utilisant la fonction Loi de Student inverse dans Excel.

Exemple :
Supposons que l'on veuille calibrer une pipette de 20 mL en pesant 10 fois le contenu de la pipette sur une balance au centième de gramme. Après avoir vérifié que la balance est juste, on obtient alors dix mesures de masse:

m (g)			
19,92	m_{moy} =	19,98	g
19,98			
19,94	σ_{n-1} =	0,045215533	g
19,95			arrondi à
19,97	$\sigma_{n-1} / \sqrt{n}$ =	0,014298407	0,0143g
20,02	avec n = 10		
20,06			
20,03			
19,94			
19,99			

Les tables statistiques donnent pour 10 mesures:
pour un niveau de confiance de 95 % : t = 2,26 => U(m) = 0,032 g (avec 2CS) ou U(m) = 0,03 g (avec 1 CS)
pour un niveau de confiance de 99 % : t = 3,25 => U(m) = 0,046 g (avec 2CS) ou U(m) = 0,05 g (avec 1 CS)