

CORRIGE DU CONCOURS GENERAL DE SCIENCES-PHYSIQUES 2006

Corrigé proposé par Renaud Carpentier

I) PROPAGATION DE LA LUMIERE DANS LES FIBRES OPTIQUES

A) Phénomène de réflexion totale

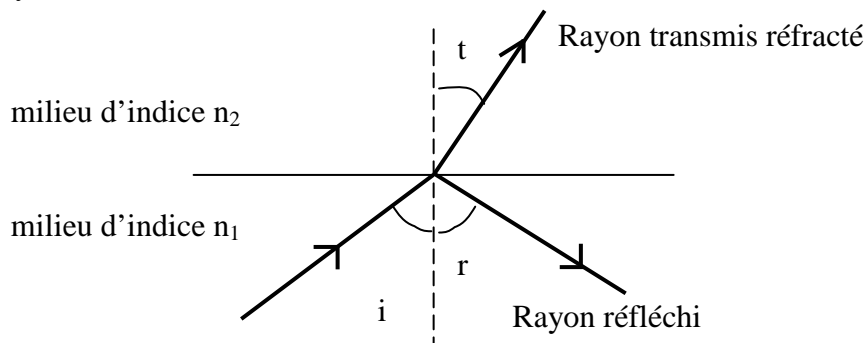
I A 1) Une lumière monochromatique signifie qu'elle n'est composée que d'une seule longueur d'onde.

I A 2) Lois de Descartes :

- les rayons réfractés et réfléchis sont dans le plan d'incidence, plan contenant le rayon incident et la normale à l'interface.

- le rayon réfracté vérifie la relation : $n_2 \sin(t) = n_1 \sin(i)$

- pour le rayon réfléchi : $r = i$



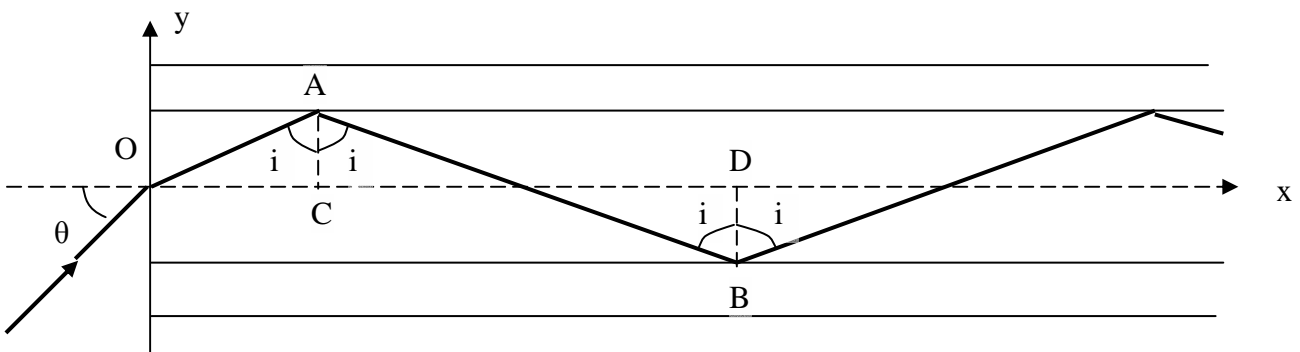
I A 3) On peut citer la décomposition de la lumière blanche par un prisme de verre. Un rayon lumineux fin de lumière blanche (d'une lampe à incandescence par exemple) au passage à travers celui-ci est dispersé : chaque couleur du spectre (c'est-à-dire chaque longueur d'onde) va être réfracté avec un angle différent, donnant en sortie un spectre en « arc-en-ciel ».

I A 4) On a nécessairement $\sin(t) < 1$. Donc le rayon réfracté n'existe que si $n_1/n_2 \sin(i) < 1$, c'est-à-dire si $i < i_0$ avec $\sin(i_0) = n_2/n_1$. D'où le résultat.

I A 5) AN : La calculatrice fournit : $i_0 = 78,5^\circ$ d'où $90 - i_0 = 11,5^\circ$

B) Fibre à saut d'indice

I B 1) D'après la question I A 4), le rayon reste confiné dans le coeur s'il y a réflexion totale, c'est-à-dire si $i > i_L$ avec $\sin(i_L) = n_g/n_c$. On remarque que si cette condition est vérifiée pour la première réflexion, elle est vérifiée pour toutes les autres (l'angle d'incidence étant toujours i), ce qui assure un confinement du rayon lors de la propagation dans la fibre.



I B 2) Loi de Descartes lors de l'injection dans la fibre : $1 \sin(\theta) = n_c \sin(\alpha)$. Or $\alpha = 90^\circ - i$, donc $\sin(\alpha) = \cos(i)$. Ainsi, $\sin(\theta) = n_c \cos(i)$. Sur l'intervalle $[0, 90^\circ]$, \cos est une fonction décroissante, donc $i > i_L$ est équivalent à $\sin(\theta) < n_c \cos(i_L)$, d'où le résultat. Par ailleurs, $\cos(i_L)$

$$= \sqrt{1 - \sin^2(i_L)} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}. \text{ D'où } ON = n_c \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}.$$

I B 3) AN : ON = 0,298.

I B 4) Par définition de l'indice, la lumière se propage dans le coeur d'indice n_c à la vitesse $v = c / n_c$.

I B 5) Le rayon qui traverse le plus rapidement la fibre est le rayon qui parcourt le moins de chemin. Ici, c'est le rayon se propageant en ligne droite dans la direction de l'axe de la fibre, c'est-à-dire tel que $\theta = 0$. La durée de parcours vaut $\tau_1 = L/v = n_c L/c$.

I B 6) Le rayon qui traverse le moins rapidement la fibre est le rayon qui parcourt le plus de chemin. Ici, c'est le rayon guidé qui fait dans la fibre le plus grand angle avec l'axe de celle-ci, c'est-à-dire tel que $i = i_L$.

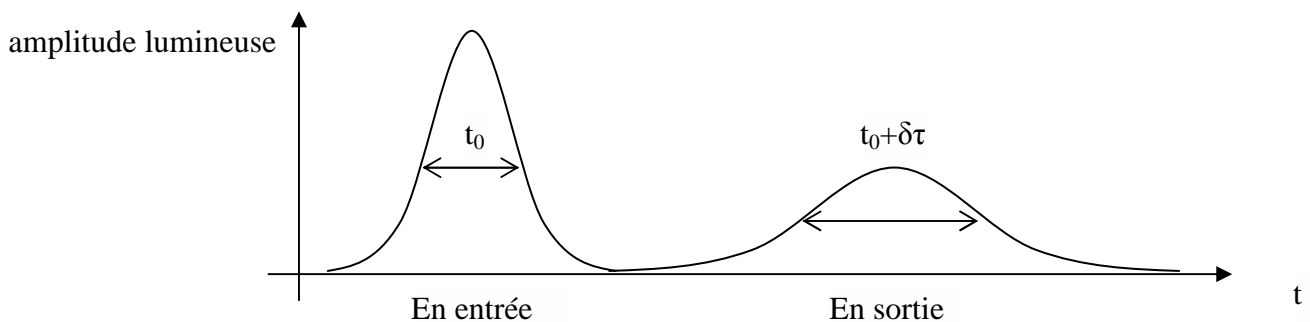
Lorsque ce rayon parcourt une distance AB, il a avancé par rapport à l'axe de la fibre d'une distance de CD (Cf. figure de la question I B 1). Or $\sin(i_L) = CD/AB$. Donc pour traverser la fibre de longueur L, le rayon parcourt une distance valant $L' = L/\sin(i_L)$.

$$\text{La durée de parcours vaut donc } \tau_2 = L'/v = \frac{n_c L}{c \sin(i_L)}.$$

$$\text{I B 7) } \delta\tau = \tau_2 - \tau_1 = \frac{n_c L}{c} \left(\frac{1}{\sin(i_L)} - 1 \right) = \frac{n_c L}{c} \left(\frac{n_c}{n_g} - 1 \right).$$

I B 8) Par définition de Δ , $n_c/n_g = \frac{1}{\sqrt{1-2\Delta}} = (1-2\Delta)^{-1/2} \approx 1 + \Delta$ puisque $\Delta \ll 1$. D'où le résultat.

I B 9) L'impulsion lumineuse va s'étaler dans la mesure où les différents rayons dans la fibre ne vont pas mettre tous le même temps pour la traverser. La durée de l'impulsion en sortie est l'écart temporel entre le rayon le plus rapide émis au début de l'impulsion et le rayon le plus lent émis à la fin de l'impulsion, cette dernière a donc en sortie une durée de l'ordre de $t_0 + \delta\tau$. Notons que l'amplitude de l'impulsion va diminuer du fait son étalement (par conservation de l'énergie lumineuse qu'elle transporte).



I B 10) La durée entre chaque impulsion est $T=1/F$. Pour éviter le recouvrement de deux impulsions, il faut que leur largeur temporelle en sortie reste plus petite que la durée entre deux impulsions, c'est-à-dire que $\delta\tau < T$.

I B 11) $\delta\tau < 1/F$ équivaut à $LF < \frac{c}{n_c \Delta}$. Donc la bande passante B vaut $\frac{c}{n_c \Delta}$. Cette grandeur

quantifie l'aptitude de la fibre optique à transmettre de l'information à grande distance. B est une valeur seuil au-delà de laquelle il est impossible de transmettre : on voit que la portée maximale de transmission est liée au débit de l'information envoyée.

I B 12) AN : $\Delta = 0,02$ et $B = 1,01 \cdot 10^{10} \text{ Hz.m} = 10,1 \text{ MHz.km}$. Pour $F = 100 \text{ MHz}$, on peut transmettre l'information sur une distance maximale de 0,101 km, c'est-à-dire sur environ 100 mètres, ce qui est très peu pour les télécommunications longue distance...

I B 13) La diffraction lumineuse (par exemple à travers une fente fine) trouve son origine dans le caractère ondulatoire de la lumière.

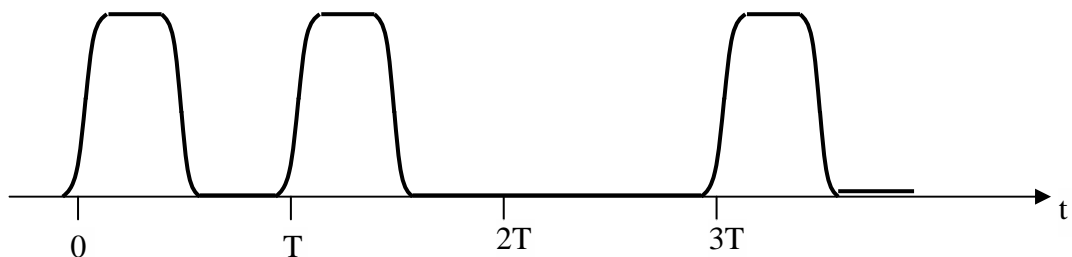
C) codage numérique de l'information

I C 1) Les êtres humains utilisent la base décimale car leurs mains possèdent 10 doigts.

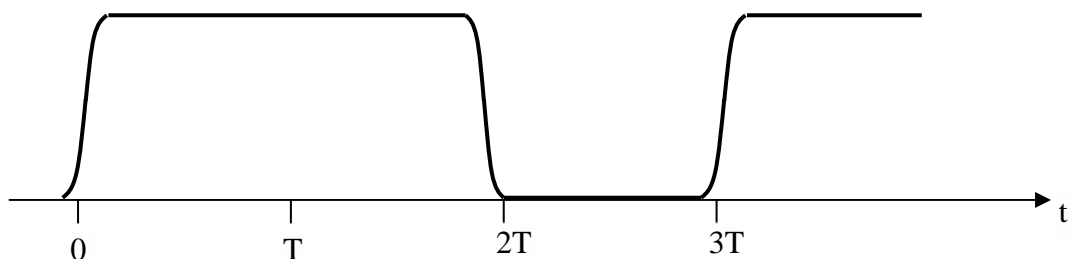
I C 2) 13 s'écrit en base binaire 1101.

I C 3) Remarque : l'énoncé ne précise pas dans quel ordre il faut afficher les chiffres. On a donc le choix : soit 1 puis 1 puis 0 puis 1, soit l'inverse. Le tracé suivant opte pour la 1^{ère} possibilité.

Pour le format RZ :



Pour le format NRZ :



I C 4) Pour le format RZ, la séquence de chiffres donnant un signal de plus grande fréquence est une succession de 1. La fréquence vaut alors $F_{RZ} = 1/T$ puisque le signal est périodique de période T.

I C 5) Pour le format NRZ, la séquence de chiffres donnant un signal de plus grande fréquence est une alternance de 0 et de 1. Dans ce cas, le signal est périodique de période $2T$ (sur une période, il y a le bit 0 et le bit 1, chacun de durée T). D'où une fréquence :

$$F_{\text{NRZ}} = \frac{1}{2T}.$$

Si l'on veut maximiser le débit d'information, le format NRZ est à privilégier. En effet, il permet de transmettre la même information (durée T identique aux 2 formats) avec une fréquence maximale deux fois plus faible. Réciproquement, pour une bande passante donnée (cf. I B), il permet a priori d'envoyer deux fois plus d'information.

I C 6) C'est le format RZ où les impulsions ont toutes la même durée qu'elle que soit la séquence binaire transmise.

D) injection du signal

I D 1) La lentille doit être mise à une distance de la fibre correspondant à sa distance focale.

I D 2) La fraction non transmise dans la fibre est tout simplement réfléchi à l'entrée.

I D 3) La perte à l'entrée de la fibre vaut $G_{\text{injection}} = 10 \log(\alpha)$ avec $\alpha = \frac{4 * 1,5}{(1,5 + 1)^2} = 0,96$ (96% de la lumière est transmise dans la fibre). D'où $G_{\text{injection}} = -0,18 \text{ dB}$.

I D 4) Le rapport puissance en sortie de fibre/puissance dans la fibre vaut aussi α . Donc le rapport puissance en sortie de fibre/puissance en entrée de fibre vaut α^2 . La perte totale entre l'entrée et la sortie vaut donc $10 \log(\alpha^2) = 2 * 10 \log(\alpha) = 2 * G_{\text{injection}} = -0,36 \text{ dB}$.

On remarque que l'on aurait pu écrire de manière plus générale, $G_{\text{totale}} = G_{\text{injection}} + G_{\text{sortie}}$ (ici $G_{\text{sortie}} = G_{\text{injection}}$). L'avantage de raisonner en décibels est que l'on additionne simplement les différentes pertes lors de la propagation pour avoir la perte totale.

E) atténuation dans la fibre

I E 1) Par définition de n , $N = n * \text{volume de la tranche}$. D'où $N = n S \Delta x$.

I E 2) La section apparente totale des différentes impuretés dans la tranche vaut $N\sigma$. La puissance totale incidente étant répartie uniformément sur la section S , la fraction F de puissance arrivant sur une des impuretés vaut donc le rapport $N\sigma/S$. D'où la fraction qui passe $\rho = 1 - F = 1 - N\sigma/S$.

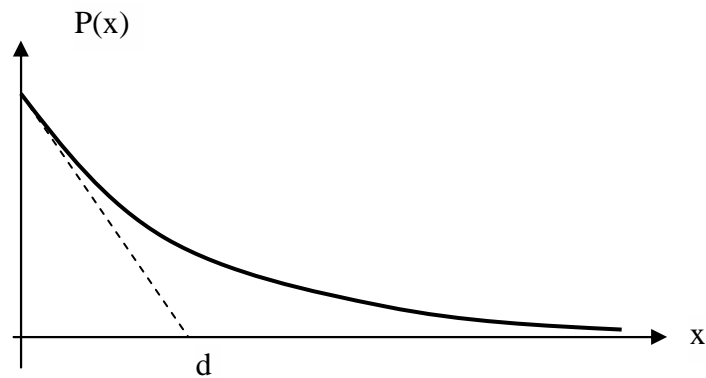
I E 3) On a : $P(x+\Delta x) = P(x) * \rho$ d'où $P(x+\Delta x) - P(x) = -P(x) * N\sigma/S = -P(x) * n\sigma\Delta x$.

Ainsi :

$$\frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} = -n\sigma P(x)$$

En faisant tendre Δx vers 0, on obtient l'équation différentielle : $P'(x) = -n\sigma P(x)$.

I E 4) Solutions générales de l'équation : $P(x) = \lambda \exp(-n\sigma x)$. En posant $P(x=0) = P_0$ et $d = 1/n\sigma$, on obtient : $P(x) = P_0 \exp(-x/d)$. la grandeur d a l'unité d'une distance. Elle représente la distance caractéristique d'atténuation de la puissance lumineuse dans la fibre. d apparaît dans le graphique : c'est l'intersection de la tangente à l'origine avec l'axe des abscisses.



I E 5) A l'abscisse x , la fraction de puissance restante vaut $P(x)/P_0 = \exp(-x/d)$. Exprimée en dB, elle vaut $10 \log(P(x)/P_0) = 10/\ln(10) (\ln(\exp(-x/d))) = -4,34 x/d$. On voit donc que la perte de puissance lumineuse sur une distance x lorsqu'elle est exprimée en dB est proportionnelle à x .

I E 6) Une diminution de 1% de la puissance lumineuse correspond à une perte en dB valant $10 \log(0,01) = -20$ dB. Avec une atténuation de 0,2 dB/km, il ne reste qu'1% du signal lumineux au bout d'une distance $L = 20 / 0,2 = 100$ km. Pour la distance Paris-Marseille (750 km), il faut donc 7 amplificateurs au total.

I E 7) Par câble électrique, la distance entre 2 amplificateurs vaut $20 / 10 = 2$ km. Il en faudrait alors 375 entre les deux villes. On voit sur cet exemple l'intérêt d'utiliser des fibres optiques pour les liaisons hauts débits à longues distances : le nombre d'amplificateurs est beaucoup moins grand, ce qui limite les problèmes de maintenance et de coûts.

I E 8) La puissance diffusée et donc les pertes diminuent lorsque la longueur d'onde augmente. On a donc intérêt à utiliser de grandes longueurs d'onde, c'est-à-dire à utiliser des sources infra-rouges (IR).

I E 9) L'objectif est d'avoir le minimum d'atténuation afin de transmettre le plus loin possible l'information. On choisit donc l'intervalle en longueur d'onde $[1,52 ; 1,62 \pm 0,02 \mu\text{m}]$. Celui-ci étant supérieur à $0,8 \mu\text{m}$, on se situe dans l'IR.

I E 10) L'atténuation maximale est pour $\lambda = 1,40 \mu\text{m}$, ce qui correspond à une fréquence $f = c/\lambda = 214$ THz.

F) étude du pic d'absorption

I F 1) k est la constante de raideur en N m^{-1} ou kg s^{-2} puisque $\text{N} = \text{kg m s}^{-2}$.

I F 2) Les deux atomes vont subir l'un de l'autre la même force en valeur absolue (cf. loi de l'action et de la réaction) mais l'atome d'oxygène est 16 fois plus lourd que l'atome d'hydrogène (cf. rapport des masses atomiques). Etant beaucoup plus massique, l'atome O, du fait de sa plus grande inertie, va avoir un mouvement d'amplitude beaucoup plus faible. On la considère nulle pour la suite.

I F 3) La relation fondamentale de la dynamique (RFD) appliqué à l'atome H de masse m dans le référentiel galiléen cité par l'énoncé s'écrit, la force de rappel du ressort étant l'unique force qui lui est appliquée :

$$m\vec{a} = \vec{F}_{ressort}$$

Or $\vec{a} = x''(t)\vec{u}_x$ et $\vec{F}_{ressort} = -kx(t)\vec{u}_x$.

En projetant sur \vec{u}_x , on obtient : $m x''(t) = -k x(t)$ ou encore $x''(t) + k/m x(t) = 0$.

Les solutions générales de cette équation différentielle sont des sinusoides de la forme :

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \text{ où } A \text{ et } \varphi \text{ sont deux constantes quelconques et } f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

f_0 représente la fréquence des oscillations libres de l'atome H, appelée fréquence propre.

I F 4) On applique à nouveau la RFD avec la force supplémentaire $\vec{F} = q\vec{E}$:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{ressort} + q\vec{E}$$

En projetant sur \vec{u}_x , on obtient la nouvelle équation différentielle :

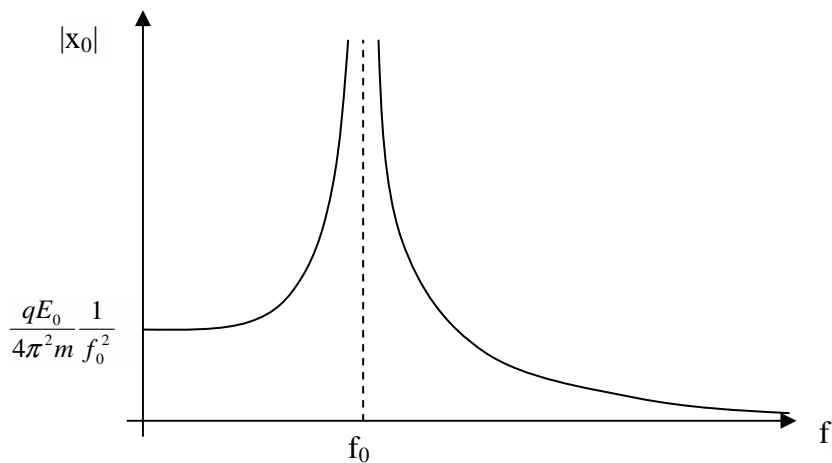
$$m x''(t) = -k x(t) + qE_0 \cos(2\pi f t) \text{ ou encore } x''(t) + 4\pi^2 f_0^2 x(t) = \frac{qE_0}{m} \cos(2\pi f t).$$

I F 5) On injecte la solution $x(t) = x_0 \cos(2\pi f t)$ dans l'équation différentielle :

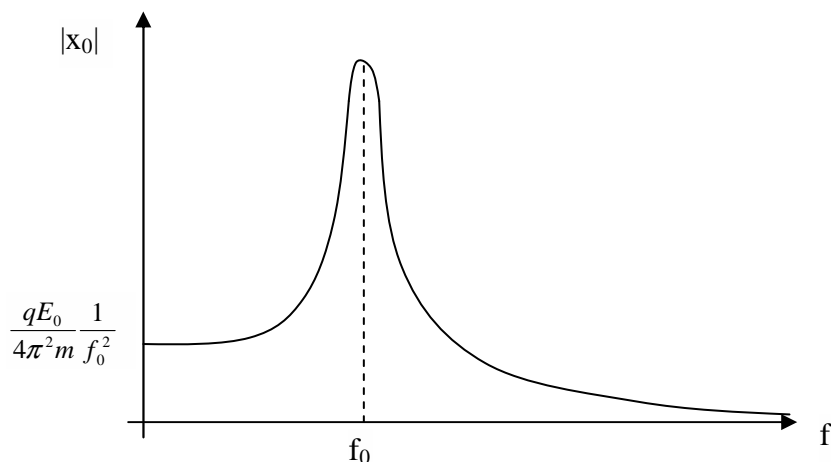
$$-4\pi^2 f^2 x_0 \cos(2\pi f t) + 4\pi^2 f_0^2 x_0 \cos(2\pi f t) = \frac{qE_0}{m} \cos(2\pi f t).$$

$$\text{D'où } x_0 = \frac{qE_0}{4\pi^2 m} \frac{1}{f_0^2 - f^2}.$$

I F 6) Allure du graphe avec les points remarquables :



Pour $f=f_0$, x_0 tend vers l'infini : l'amplitude des oscillations devient infiniment grande. C'est en pratique impossible : il manque au modèle les forces dissipatives. Dans le cadre de la modélisation utilisée, il faudrait rajouter une force de frottement (sachant qu'en réalité, l'atome perd de l'énergie principalement par rayonnement et non par « frottement » avec les autres atomes). Dans ce cas, l'amplitude pour $f=f_0$ reste finie et l'on obtient un graphe ayant l'allure ci-contre :



Le pic d'amplitude autour de f_0 correspond à un phénomène de résonance. Si la fréquence de la lumière éclairant une liaison O-H est proche de la fréquence propre, les atomes H se mettent à vibrer avec une grande amplitude, absorbant beaucoup d'énergie pour ensuite la rediffuser. Ceci explique pourquoi l'onde lumineuse est fortement atténuée dans la fibre optique si la fréquence est proche de f_0 .

I F 7) La masse molaire M_H est la masse de N_A atomes H, donc la masse d'un atome H vaut $m = M_H/N_A = 1,0 \cdot 10^{-3} / 6,02 \cdot 10^{23} = 1,7 \cdot 10^{-27}$ kg.

La fréquence f_0 vaut, d'après l'énoncé, $f_0 = 214/2$ THz = $1,07 \cdot 10^{14}$ Hz.

On en déduit $k = 4\pi^2 f_0^2 m = 7,7 \cdot 10^2$ N.m⁻¹.

II) FABRICATION D'UNE FIBRE OPTIQUE

A) Etude de l'oxydation de SiCl₄

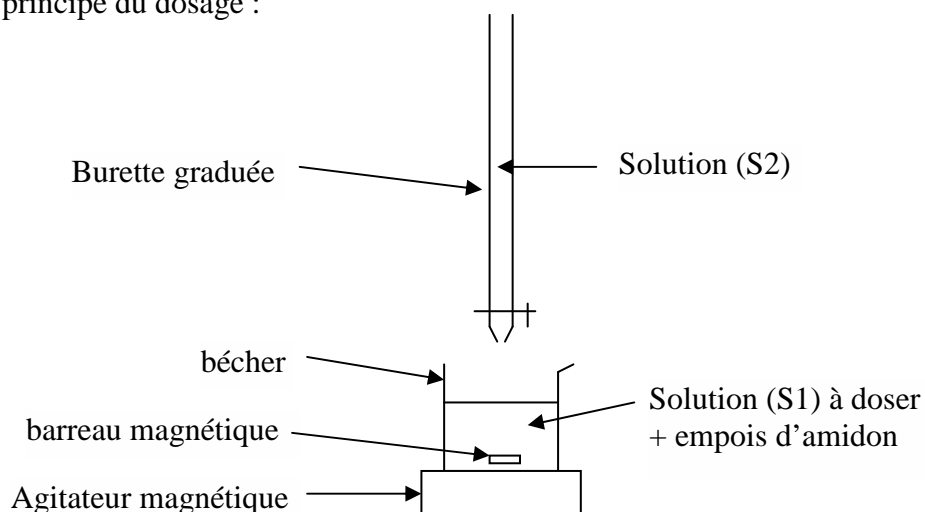
II A 1) L'équation s'écrit : $\text{SiCl}_4 + \text{O}_2 = \text{SiO}_2 + 2 \text{Cl}_2$.

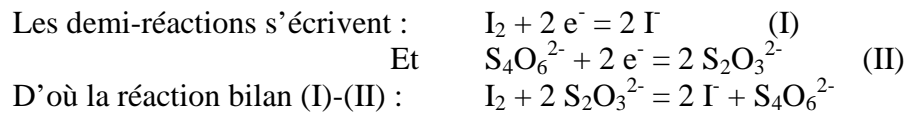
II A 2) Une solution de $\text{K}^+_{(\text{aq})} + \text{I}^-_{(\text{aq})}$ se nomme une solution d'iodure de potassium. Une solution de $2\text{Na}^+_{(\text{aq})} + \text{S}_2\text{O}_3^{2-}_{(\text{aq})}$ s'appelle une solution de thiosulfate de sodium.

II A 3) Les demi-réactions s'écrivent : $\text{Cl}_2 + 2 e^- = 2 \text{Cl}^-$ (I)
Et $\text{S}_4\text{O}_6^{2-} + 2 e^- = 2 \text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ (II)

D'où la réaction bilan (I)-(II) : $\text{Cl}_2 + 2 \text{S}_2\text{O}_3^{2-} = 2 \text{Cl}^- + \text{S}_4\text{O}_6^{2-}$

II A 4) Schéma de principe du dosage :





L'empois d'amidon forme avec le diiode un complexe bleu. Il sert ainsi à mieux visualiser l'équivalence (correspondant à la disparition de la couleur bleue).

II A 5) A l'équivalence, on peut écrire : 2 * quantité de matière de I_2 versé = quantité de matière de $S_2O_3^{2-}$ restante (après réaction avec Cl_2) avant dosage, notée n_{restante} .

On a ainsi : $2 c_2 V_{\text{eq}} = n_{\text{restante}}$.

Par conservation de la matière, quantité de matière de $S_2O_3^{2-}$ initiale = quantité de matière de $S_2O_3^{2-}$ ayant réagi avec Cl_2 + quantité de matière de $S_2O_3^{2-}$ restante (après réaction avec Cl_2). Donc la quantité de matière de $S_2O_3^{2-}$ ayant réagi avec Cl_2 , noté $n_{\text{réagi}}$, vaut :

$$n_{\text{réagi}} = n_{\text{initiale}} - n_{\text{restante}} = c_1 V_1 - 2 c_2 V_{\text{eq}} = 6,07 \cdot 10^{-4} \text{ mol.}$$

II A 6) La réaction écrite à la question II A 3) étant totale et le dichlore étant le réactif par défaut, on a : 2 * quantité de matière de dichlore en contact avec (S1) = quantité de matière de $S_2O_3^{2-}$ ayant réagi. Donc $n_{\text{dichlore en contact avec (S1)}} = 3,03 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$. Cette valeur correspond à la quantité de matière de dichlore qui est sortie du four pendant le temps $\tau = 10 \text{ min} = 600 \text{ s}$.

Par définition du débit molaire de dichlore, $D_m = 3,03 \cdot 10^{-4} \text{ mol}/600 \text{ s} = 5,06 \cdot 10^{-7} \text{ mol.s}^{-1}$.

II A 7) débit molaire = quantité de matière passant à travers le four par unité de temps = quantité de matière par unité de volume * volume passant à le four par unité de temps = concentration * débit volumique.

$$\text{Donc : } D_m = [Cl_2] D_v \text{ d'où } [Cl_2] = 5,06 \cdot 10^{-7} \text{ mol.s}^{-1} / 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ L.s}^{-1} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}.$$

II A 8) La réaction écrite à la question II A 1) étant totale, on a : quantité de matière de dichlore produit = 2 * quantité de matière de $SiCl_4$ ayant réagi = 2 *(quantité de matière de $SiCl_4$ initiale - quantité de matière de $SiCl_4$ restante).

En raisonnant par unité de volume du gaz : $[Cl_2] = 2([SiCl_4]_0 - [SiCl_4]_{\text{sortie du four}})$.

$$\text{D'où } [SiCl_4]_{\text{sortie du four}} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}.$$

II A 9) Par définition, $v_r = + \frac{1}{V} \frac{dx}{dt}$.

$$\text{Mais } [SiCl_4] = [SiCl_4]_0 - x/V. \text{ D'où } \frac{d[SiCl_4]}{dt} = - \frac{1}{V} \frac{dx}{dt}. \text{ Ainsi } v_r = - \frac{d[SiCl_4]}{dt}.$$

II A 10) Si la réaction est d'ordre 1, la concentration de tétrachlorosilane vérifie l'équation différentielle : $\frac{d[SiCl_4]}{dt} = -k_1 [SiCl_4]$, dont les solutions sont : $[SiCl_4] = \lambda \exp(-k_1 t)$. Sachant que $[SiCl_4](t=0) = [SiCl_4]_0$, on obtient $\lambda = [SiCl_4]_0$.

Au bilan, $[SiCl_4] = [SiCl_4]_0 \exp(-k_1 t)$.

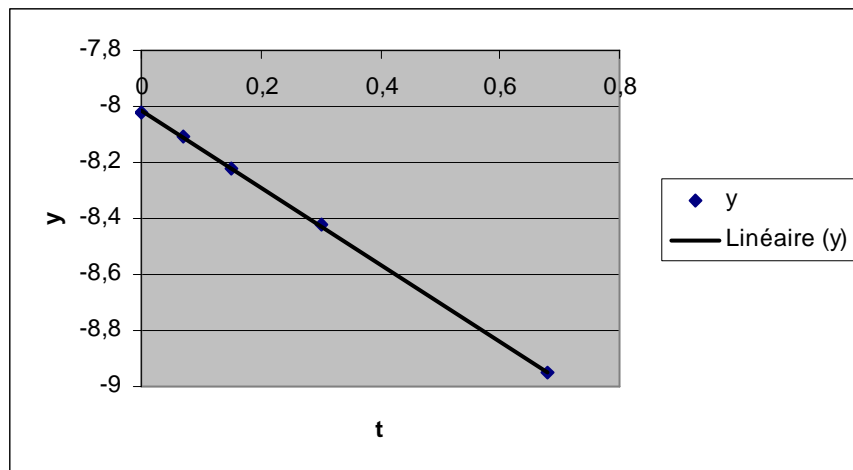
En posant $y = \ln([SiCl_4])$, on a : $y = a - k_1 t$ avec $a = \ln([SiCl_4]_0)$, qui est bien une fonction affine du temps.

II A 11) Tableau complété avec la ligne des y :

Temps t (en s)	0	0,07	0,15	0,30	0,68
[SiCl ₄] (en 10 ⁻⁴ mol.L ⁻¹)	3,3	3,0	2,7	2,2	1,3
y = ln ([SiCl ₄])	-8,02	-8,11	-8,22	-8,42	-8,95

Remarque : on prend y avec un chiffre significatif en plus pour éviter une erreur d'arrondi.

II A 12) On trace y=f(t) :



Les points expérimentaux sont bien alignés. On essaie de tracer la droite qui passe au plus près de l'ensemble des points (à l'ordinateur, on effectue une régression linéaire). La mesure de la pente de celle-ci donne directement la valeur numérique de $-k_1$.

On trouve $k_1 = 1,37 \text{ s}^{-1}$.

II A 13) Les réactifs réagissent uniquement pendant le temps de la traversée de la flamme du chalumeau, c'est-à-dire pendant un temps $t = 3 \text{ cm} / 10 \text{ cm.s}^{-1} = 0,3 \text{ s}$. La fraction de SiCl₄ restant vaut donc : $[\text{SiCl}_4]/[\text{SiCl}_4]_0 = \exp(-k_1 t) = \exp(-20 \cdot 0,3) = 0,25 \%$.

Ainsi 99,75 % du tétrachlorosilane a été oxydé. On peut donc considérer que la réaction de fabrication de la silice est totale dans la méthode MCVD.

B) fabrication et étirage de la préforme

II B 1) L'intérêt de faire pivoter le tube est d'assurer un dépôt uniforme à l'intérieur de celui-ci.

II B 2) Il y a conservation du volume de la préforme. Avec L la longueur de la préforme :

$$\text{Volume avant rétreint} = \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2) L$$

$$\text{Volume après rétreint} = \frac{\pi}{4} d_f^2 L. \quad \text{D'où } d_f = \sqrt{d_2^2 - d_1^2} = 7,0 \text{ cm.}$$

II B 3) On note L' la longueur de fibre optique créée. Toujours par conservation du volume du

$$\text{verre : } \frac{\pi}{4} d_f^2 L = \frac{\pi}{4} d_{\text{fibre}}^2 L', \text{ d'où : } L' = \left(\frac{d_f}{d_{\text{fibre}}} \right)^2 L = \left(\frac{7 \cdot 10^{-2}}{125 \cdot 10^{-6}} \right)^2 1 = 3,1 \cdot 10^5 \text{ m} = 310 \text{ km.}$$

II B 4) D_V est en $m^3 \cdot s^{-1}$, S en m^2 et V en $m \cdot s^{-1}$. L'homogénéité pour les mètres donne $3 = 2\alpha + \beta$ et pour les secondes donne $-1 = -\beta$. D'où $\beta = 1$ et $\alpha = 1$.

La section d'une fibre vaut $S = \pi r^2$. On en déduit $r = \sqrt{\frac{D_V}{\pi V}}$.

$$\text{II B 5) } r = \sqrt{\frac{D_{V_0} + \delta D_V}{\pi V}} = \sqrt{\frac{D_{V_0}}{\pi V} \left(1 + \frac{\delta D_V}{D_{V_0}}\right)^{1/2}} \approx r_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta D_V}{D_{V_0}}\right) = r_0 + \delta r \text{ d'où le résultat.}$$

II B 6) Supposons qu'une perturbation du système induise une légère augmentation de D_V . Dans ce cas, le rayon r de la fibre augmente (r étant une fonction croissante de D_V). Dans le même temps, l'asservissement du type $V = V_0 + K(r - r_0)$ fait augmenter la vitesse V (K étant positive), ce qui a donc tendance à limiter l'augmentation de r (puisque r est une fonction décroissante de V (cf. II B 4)).

II B 7) On utilise la formule mathématique de l'énoncé avec $\varepsilon = 1/2$ et $\gamma = -1/2$.

On a : $\frac{\delta r}{r_0} \approx \frac{1}{2} \frac{\delta D_V}{D_{V_0}} - \frac{1}{2} \frac{\delta V}{V_0}$. Mais $\delta V = V - V_0 = K(r - r_0) = K \delta r$.

D'où $\left(1 + \frac{1}{2} \frac{K r_0}{V_0}\right) \frac{\delta r}{r_0} \approx \frac{1}{2} \frac{\delta D_V}{D_{V_0}}$. L'asservissement est efficace si $\frac{K r_0}{2 V_0}$ est grand devant 1. En

effet, dans ce cas, $\left(\frac{\delta r}{r_0}\right)_{\text{asservi}} \ll \left(\frac{\delta r}{r_0}\right)_{\text{sans asservissement}}$. Pour diminuer les variations d'un facteur

20, il faut que $\frac{K r_0}{2 V_0} = 19$, d'où $K = 19 \frac{2 \times 500 / 60 m \cdot s^{-1}}{(125 / 2) \cdot 10^{-6} m} = 5 \cdot 10^6 s^{-1}$.

II B 8) Si $r(t) > r_0$, on intègre une fonction positive : la vitesse $V(t)$ augmente.

II B 9) Supposons qu'une perturbation fasse augmenter la valeur de $r(t)$. Dans ce cas, l'asservissement fait progressivement augmenter la vitesse $V(t)$, ce qui fait rediminuer $r(t)$ (Cf. formule du II B 4)) et ceci tant que $r(t)$ reste supérieur à la consigne r_0 . Si entre temps, la perturbation n'a pas varié, le régime permanent est atteint lorsque $V(t)$ ne varie plus, c'est-à-dire que $r(t)$ est égal à r_0 .

C) Dissolution de la silice dans l'eau

II C 1) A l'équilibre, le quotient de réaction est égal à la constante de réaction :

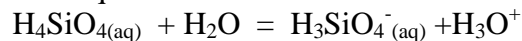
$$Q_r = \frac{a_{H_4SiO_4}}{a_{H_2O}^2 a_{SiO_2}} = \frac{[H_4SiO_4]_{\text{éq}}}{1^2 \times 1} = K_1 \text{ d'où } [H_4SiO_4]_{\text{éq}} = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot L^{-1}.$$

La masse molaire de la silice vaut : $M(SiO_2) = 28,1 + 2 \cdot 16,0 = 60,1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

D'après les coefficients stoechiométriques de la réaction de dissolution, on dissout $c = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$ de SiO_2 dans 1 litre d'eau, d'où une masse dissoute $m = Mc = 0,12 \text{ g}$.

II C 2) Pour $pH < 8,5$ environ, la solubilité s ne dépend pas du pH . Elle vaut approximativement la concentration de la forme acide du couple. Au-delà, la solubilité augmente du fait de l'apparition de la forme basique qui prédomine pour $pH > 10,5$ environ.

Le pKa du couple vaut par définition $-\log(Ka)$ où Ka désigne la constante d'acidité du couple, c'est-à-dire la constante d'équilibre de la réaction :



A l'équilibre, on a ainsi : $\frac{[H_3SiO_{4(aq)}^-]_{\text{éq}} [H_3O^+]_{\text{éq}}}{[H_4SiO_{4(aq)}]_{\text{éq}}} = Ka$, ou $pH = pKa + \log\left(\frac{[H_3SiO_{4(aq)}^-]_{\text{éq}}}{[H_4SiO_{4(aq)}]_{\text{éq}}}\right)$,

donc pour $[H_4SiO_{4(aq)}]_{\text{éq}} = [H_3SiO_{4(aq)}^-]_{\text{éq}}$, on a la relation $pH = pKa$.

On voit que l'on a égalité des concentrations pour $pH=9,5$. Donc $pKa = 9,5$.

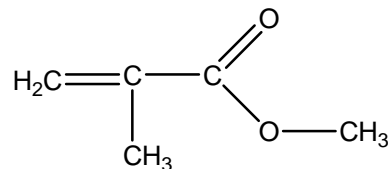
II C 3) 0,38 g de silice pour un litre correspond à une solubilité $s = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$, ce qui donne $\log(s) = -2,2$. Par lecture graphique, on obtient cette valeur pour $pH > 9,8$.

D) Enrobage plastique

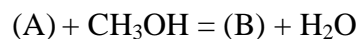
II D 1) Un polymère est une macromolécule constituée d'un très grand nombre de molécules identiques (appelées monomères) unis les uns aux autres par des liaisons covalentes.

II D 2) Le composé (A) comprend le groupe caractéristique $-\text{COOH}$ (famille des acides carboxyliques). Il possède également une double liaison ($\text{C}=\text{C}$) qui le classe aussi dans la famille des alcènes.

II D 3) Il y a réaction entre le groupe $-\text{COOH}$ et le groupe $\text{R}-\text{OH}$ (famille des alcools) pour former le groupe $-\text{COOR}$ qui fait partie de la famille des esters. La formule semi développée de (B) est :

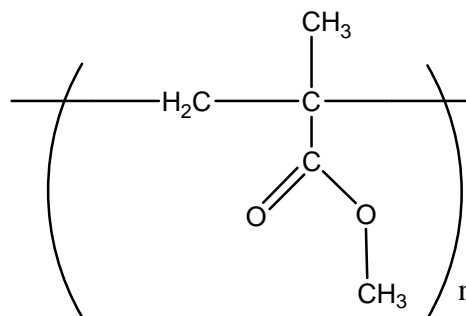


La réaction s'écrit :



Il s'agit d'une réaction d'estérification.

II D 4) La polymérisation est ici une polyaddition d'un alcène. Le motif du PMMA est :



III) THERMOMETRE REPARTI A EFFET RAMAN

A) Surveillance de sites à risques

III A 1) Le transport de l'électricité sous très haute tension permet de limiter les pertes d'énergie par effet Joule (en diminuant le courant dans les lignes). Habituellement, les lignes THT sont aériennes (maintenues en l'air par de gros pylônes). Pour un aéroport, dans le cas par exemple d'un atterrissage d'urgence hors de la piste, un avion passant à travers une ligne THT située à proximité (en la détruisant) mettrait en danger l'équipage ainsi que les secours.

III A 2) Le départ d'incendie peut se produire n'importe où dans le tunnel. En estimant qu'il faudrait (très approximativement) une mesure de température tous les 20 mètres, il faudrait près de 600 thermomètres (pour être large, plusieurs centaines...). Cela engendrerait un coût financier important pour l'installation mais aussi la maintenance du réseau de capteurs. Le thermomètre réparti n'utilise quant à elle *qu'une seule* fibre optique de grande durée de vie et ne nécessitant aucune maintenance.

B) Description du thermomètre réparti à effet Raman

III B 1) Dans la fibre, l'impulsion lumineuse se propage à la vitesse c/n . Elle met donc un temps nx/c pour parcourir la distance x . En prenant en compte le temps pour le retour, elle faut regarder à la date $t = \frac{2nx}{c}$ pour observer ce qui a été rétrodiffusé à la distance x .

III B 2) A un instant donné, la lumière ressortant de la fibre peut provenir de plusieurs endroits si l'impulsion a une durée t_0 non nulle. On peut en effet récupérer au même instant un retour de lumière issue du début de l'impulsion (rétrodiffusée à une distance x) mais également issue de la fin de l'impulsion, celle-ci ayant été rétrodiffusée à une distance inférieure (notée $x-d$).

III B 3) Si le début de l'impulsion rétrodiffusé à la distance x revient à la date $t = \frac{2nx}{c}$ (cf. III B 1), la fin de celle-ci ayant été rétrodiffusée à une distance $x-d$ revient à la date $t' = \frac{2n(x-d)}{c} + t_0$. On reçoit donc à un instant donné tout ce qui a été rétrodiffusé sur une longueur d telle que $t=t'$, c'est-à-dire telle que $\frac{2nd}{c} = t_0$. Ainsi le cahier des charges imposant $d < 1\text{m}$ oblige à ce que t_0 soit inférieur à $\frac{2 \times 1,5 \times 1}{3 \cdot 10^8} = 10 \text{ ns}$.

III B 4) La période d'échantillonnage T_{acq} correspond à l'augmentation de t (définie au III B 1) lorsque x augmente de 1 mètre. D'où $T_{acq} = \frac{2n \times (1\text{mètre})}{c}$: on peut voir que l'on retrouve la même condition de durée qu'à la question précédente.

D'où $F_{acq} = 1/T_{acq} = 100 \text{ MHz}$.

C) Etude de la diffusion Raman

III C 1) Si la molécule passe du niveau fondamental au niveau excité (1^{er} cas), elle récupère de l'énergie du photon. Celui-ci repart donc avec une fréquence plus faible, c'est-à-dire une longueur d'onde plus grande : il s'agit donc de la raie « Stokes ». De même, dans le second cas, la molécule cède de l'énergie au photon, d'où pour lui une fréquence plus grande, donc une longueur d'onde plus petite : c'est la raie « anti-Stokes ».

Dans les deux cas, l'énergie du système {molécule+photon} est conservée. Par ailleurs, on a la relation $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$, où ν_0 désigne la fréquence du photon incident.

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } E_0 + h\nu_0 = E_i + h\nu_S \quad \text{d'où} \quad \nu_S = \frac{c}{\lambda_0} - \frac{E_i - E_0}{h}.$$

$$2^{\text{ème}} \text{ cas : } E_i + h\nu_0 = E_0 + h\nu_{AS} \quad \text{d'où} \quad \nu_{AS} = \frac{c}{\lambda_0} + \frac{E_i - E_0}{h}.$$

$$\text{III C 2) Pour la raie Stokes : } \lambda_S = \frac{c}{\nu_S} = \frac{\lambda_0}{\left(1 - \frac{E_i - E_0}{hc} \lambda_0\right)} \approx \lambda_0 \left(1 + \frac{E_i - E_0}{hc} \lambda_0\right), \text{ justifié puisque}$$

$\Delta E \ll hc/\lambda_0$. Le résultat pour λ_{AS} se démontre de la même façon (seul le signe change).

$$\text{III C 3) } R = \frac{I_{\text{diffusée, AS}}}{I_{\text{diffusée, S}}} = \frac{K \frac{1}{\lambda_{AS}^4} N(E_i)}{K \frac{1}{\lambda_S^4} N(E_0)}, \text{ où } N(E) \text{ désigne le nombre de molécules ayant une}$$

énergie E. D'après la loi de Boltzmann, $N(E) = k \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$, où k est indépendant de E.

$$\text{D'où } R = \frac{\lambda_S^4 \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)}{\lambda_{AS}^4 \exp\left(-\frac{E_0}{k_B T}\right)}. \text{ On aboutit à la formule de l'énoncé.}$$

III C 4) La détermination de la température est déduite de la mesure de R. On voit que la formule théorique reliant R et T ne fait intervenir aucun autre paramètre physique (comme la pression, la courbure de la fibre...) qui pourrait varier au cours du temps. Ainsi, le système ne subit aucune dérive (d'où le terme de « robustesse ») et il n'a donc pas à être étalonné périodiquement.

D) Etude spectrale de la lumière rétrodiffusée

III D 1) On sait que $\lambda_{AS} < \lambda_0 < \lambda_S$. Donc $\lambda_{AS} = 940$ nm (raie anti-Stokes), $\lambda_0 = 980$ nm (diffusion Rayleigh) et $\lambda_S = 1020$ nm (raie Stokes). D'après III C 2), on a

$$\lambda_S - \lambda_0 = \frac{\lambda_0^2 \Delta E}{hc}, \text{ d'où } \Delta E = \frac{hc}{\lambda_0^2} (\lambda_S - \lambda_0) = 8,3 \cdot 10^{-21} \text{ J } (= 52 \text{ meV}).$$

III D 2) L'écart entre la raie Stokes et la raie principale vaut $39-14 = 25$ dB, d'où un rapport de 1/320 environ. La raie Stokes de la diffusion Raman est plus de 300 fois moins intense que

la raie provenant de la diffusion Rayleigh, d'où la nécessité de bloquer cette dernière par le filtre F_0 pour que les mesures faites par les photorécepteurs (raies S et AS) ne soient pas faussées.

III D 3) L'écart entre les raies Stokes et anti-Stokes vaut $14-6 = 8$ dB. D'où $R = 1/6,3 = 0,16$.

On utilise la formule démontrée à la question III C 3) pour en déduire T, toutes les autres grandeurs étant connues :

$$T = \frac{\Delta E}{k_B \ln \left(\left(\frac{\lambda_S}{\lambda_{AS}} \right)^4 \frac{1}{R} \right)} \quad \text{AN : } T = 277 \text{ K} = 4^\circ\text{C}.$$

L'incertitude de mesure sur la figure 15 peut être estimée à environ $\pm 0,5$ dB, ce qui donne une incertitude sur la température de l'ordre de $\pm 14^\circ\text{C}$. La mesure n'est donc pas précise.

E) Etude du photorécepteur

III E 1) Sur un temps τ , l'énergie lumineuse arrivant sur la photodiode vaut $E_{\text{lum}} = P_{\text{lum}} \tau$. Cette lumière correspond à un nombre $N = E_{\text{lum}} / h\nu$ photons. Il y a donc ηN photons absorbés par la photodiode, chacun d'eux libérant un électron. D'où une charge totale libérée Q pendant le temps τ telle que : $Q = \eta Ne = \frac{\eta e P_{\text{lum}} \tau}{h\nu}$.

III E 2) Par définition de l'intensité, $i_{ph} = \frac{Q}{\tau}$. Par ailleurs, $\lambda = \frac{c}{\nu}$, d'où le résultat.

III E 3) $\eta = \frac{hc \times \text{sensibilité}}{e\lambda_{AS}} = 0,86$ (sans unité).

FIN