Les pbs de changement de repère

I Problématique

A. La Mécanique privilégie un « référentiel galiléen » (l'existence d'au moins un - $\mathcal{R}_0$ - est postulé ! Tout autre référentiel - $\mathcal{R}_i$ - en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$ est également galiléen)
B. Pb des autres référentiels ? Il faut étudier les relations de transformation (position, vitesse, accélération) lors de changement de repère

II Les définitions …

Soit un référentiel (on ne présume en rien qu'il soit galiléen !) $\mathcal{R}$: (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

1) Position $\overrightarrow{OM} = x\,.\,\vec{i} + y\,.\,\vec{j} + z\,.\,\vec{k}$

2) Vitesse $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\,.\,\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\,.\,\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}\,.\,\vec{k} = \dot{x}\,.\,\vec{i} + \dot{y}\,.\,\vec{j} + \dot{z}\,.\,\vec{k}$

3) Accélération $\vec{a} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\,.\,\vec{i} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\,.\,\vec{j} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\,.\,\vec{k} = \ddot{x}.\,\vec{i} + \ddot{y}\,.\,\vec{j} + \ddot{z}\,.\,\vec{k}$

Par définition même, dans le référentiel considéré, les vecteurs du repère ne dépendent pas du temps, seules les coordonnées du point en dépendent.

On a donc : $\overrightarrow{OM} \quad \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$ => équations horaires (≡ maths : équations paramétrées par t !)

La trajectoire étant l'ensemble des positions successives, dans le référentiel considéré, elle se définit par une équation ne faisant intervenir que les coordonnées de position – F (x,y,z) = 0 - : pour trouver cette équation, il faut donc , à partir des équations horaires, éliminer *t*.

Si les équations horaires sont connues, la détermination des coordonnées de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ est évidente … par dérivation successive par rapport au temps.

Inversement, la connaissance des coordonnées de $\vec{a}$ (généralement obtenues à partir de l'application de la deuxième loi de Newton – *uniquement valide dans un référentiel galiléen* !-) , permet de « remonter » aux équations horaires par intégrations successives.

Il faut donc savoir traiter le pb quand le référentiel n'est pas galiléen…

III Lemmes : vecteur rotation et dérivation d'une fonction vectorielle dépendant du temps dans des repères différents

a) Cas général

Soit un vecteur $\overrightarrow{AB}$ de norme constante : $\overrightarrow{AB}^2$ = Cste ⇔ $2\,\overrightarrow{AB}\ \dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0$

Donc $\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \perp \overrightarrow{AB}$ et il existe donc un vecteur $\vec{\Omega}$ tel que $\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$ ($\wedge$: *produit vectoriel*)

Pb : Le problème est : ce vecteur $\vec{\Omega}$ est-il le même, dans un repère donné, pour tous les vecteurs de norme constante ?

*La réponse est **oui** car on démontre (hors pg TS évidemment !) que la relation $\overrightarrow{AB} . \dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0$ est caractéristique d'un torseur, ensemble d'un champ de moments et d'un vecteur résultant.* On a alors la relation $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$

Rem1 : Cette relation est importante pour l'étude de la mécanique des solides où, par définition, dans le cas d'un solide (S) indéformable, $\forall A, B \in (S)$ $\overrightarrow{AB}^2$ = Cste

Rem2 : Ne pouvant s'appuyer sur le résultat mathématique général sur les propriétés des torseurs, on va démontrer la propriété - le vecteur $\vec{\Omega}$ est le même ! – et même déterminer un moyen de le calculer

b) Vecteur rotation d'un repère $\mathcal{R}$: (O' , $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$) par rapport à une autre $\mathcal{R}_o$: (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) *(les deux repères sont superposés évidemment orthonormés et par hypothèse, on suppose que le repère $\mathcal{R}_o$ est « immobile » - $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ne dépendent pas du temps – et $\mathcal{R}$ est mobile $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ dépendent du temps-)*

Objectif : Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{\Omega}$ tel que $\dfrac{d\vec{I}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{I}$ (idem pour $\vec{J}$, $\vec{K}$)

Posons donc que $\begin{pmatrix} \dot{\vec{I}} \\ \dot{\vec{J}} \\ \dot{\vec{K}} \end{pmatrix} = A . \begin{pmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{pmatrix}$, avec A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ l'objectif est alors de trouver les a_{ij}

Relation (A) : $\dfrac{d\vec{I}}{dt} \perp \vec{I}$ (idem pour $\vec{J}$, $\vec{K}$) donc $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ (en faisant $\dfrac{d\vec{I}}{dt} . \vec{I}$ avec $\vec{I} . \vec{J} = \vec{I} . \vec{K} = 0$)

Relation (B) : $\vec{I} . \vec{J} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d\vec{I}}{dt} . \vec{J} + \dfrac{d\vec{J}}{dt} . \vec{I} = 0$ (en dérivant) d'où $a_{12} + a_{21} = 0$

De même $a_{23} + a_{32} = a_{31} + a_{13} = 0$ par $\vec{J} . \vec{K}$ puis $\vec{I} . \vec{K} = 0$

On en déduit que la matrice A est de la forme : A = $\begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ et si on considère que vecteur $\vec{\Omega} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on voit que :

$\dfrac{d\vec{I}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{I}$ (idem pour $\vec{J}$, $\vec{K}$)

et de plus, on peut calculer les coordonnées de $\vec{\Omega}$ par $a = \dfrac{d\vec{J}}{dt} . \vec{K}$ $b = \dfrac{d\vec{K}}{dt} \vec{I}$ $c = \dfrac{d\vec{I}}{dt} . \vec{J}$

Rem : Il est bon remarquer que le vecteur $\vec{\Omega}$ traduit la rotation du repère $\mathcal{R}$ par $\mathcal{R}_0$ et il peut être judicieux de le traduire dans notation par $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0}$ Cela peut être utile lorsque l'on étudie le passage entre plusieurs repères (*voir d) infra*)

c) dérivation d'une grandeur vectorielle dépendant du temps dans des repères différents

Soit une grandeur vectorielle $\vec{F}(t)$ et deux repères $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ dans lesquels on peut étudier cette grandeur. Les deux repères sont interchangeables, et on pose comme hypothèse que $\mathcal{R}_1$ est « immobile » et $\mathcal{R}_2$ « mobile »

Rem : en maths, on parlerait de deux « bases » d'étude : $\mathcal{R}_1$ *serait la « base de dérivation » et* $\mathcal{R}_2$*la « base de projection »*

On a alors la relation : $\vec{F}(t) = X_1\ \vec{I}_1 + Y_1\ \vec{J}_1 + Z_1\ \vec{K}_1 = X_2\ \vec{I}_2 + Y_2\ \vec{J}_2 + Z_2\ \vec{K}_2$

Par définition $\dfrac{d\vec{F}(t)}{dt}_{/\mathcal{R}1} = \dfrac{dX_1}{dt}\vec{I}_1 + \dfrac{dY_1}{dt}\vec{J}_1 + \dfrac{dZ_1}{dt}\vec{K}_1$ et $\dfrac{d\vec{F}(t)}{dt}_{/\mathcal{R}2} = \dfrac{dX_2}{dt}\vec{I}_2 + \dfrac{dY_2}{dt}\vec{J}_2 + \dfrac{dZ_2}{dt}\vec{K}_2$

Rem : dans les deux relations ci-dessus, « base de projection » et « base de dérivation » sont identiques !

Maintenant considérons comme $\mathcal{R}_1$ comme « base de dérivation » et $\mathcal{R}_2$ comme « base de projection » :

$$\frac{d\vec{F}(t)}{dt}_{/\mathcal{R}1} = \frac{dX_2}{dt}\vec{I}_2 + \frac{dY_2}{dt}\vec{J}_2 + \frac{dZ_2}{dt}\vec{K}_2 \qquad + X_2\frac{d\,\vec{I}_2}{dt} + Y_2\frac{d\,\vec{J}_2}{dt} + Z_2\frac{d\,\vec{K}_2}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{F}(t)}{dt}_{/\mathcal{R}1} = \frac{d\vec{F}(t)}{dt}_{/\mathcal{R}2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}2/\mathcal{R}1}\wedge\ \vec{F}(t)}$$ Formule de changement de base de dérivation

d) Composition des rotations

Soient maintenant trois repères $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_1$, et $\mathcal{R}_2$ et l'on suppose connus les vecteurs rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}1/\mathcal{R}0}$, $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}2/\mathcal{R}0}$ et $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}2/\mathcal{R}1}$.
Y a-t-il une relation entre ces trois vecteurs ?

Soit un vecteur $\vec{I}_2$ (resp $\vec{J}_2$, $\vec{K}_2$) du repère $\mathcal{R}_2$, en appliquant la formule de changement de base de dérivation et en considérant $\mathcal{R}_0$ comme « base de dérivation » et $\mathcal{R}_1$, comme « base de projection »

$$\frac{d\,\vec{I}_2}{dt}_{/\mathcal{R}0} = \frac{d\,\vec{I}_2}{dt}_{/\mathcal{R}1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}1/\mathcal{R}0}\wedge\ \vec{I}_2$$

Or $\dfrac{d\,\vec{I}_2}{dt}_{/\mathcal{R}1} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}2/\mathcal{R}1}\wedge\ \vec{I}_2 = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}2/\mathcal{R}0}\wedge\ \vec{I}_2$ puisque $\vec{I}_2$, étant vecteur de base de $\mathcal{R}_2$ il s'ensuit que $\dfrac{d\,\vec{I}_2}{dt}_{/\mathcal{R}2} = \vec{0}$

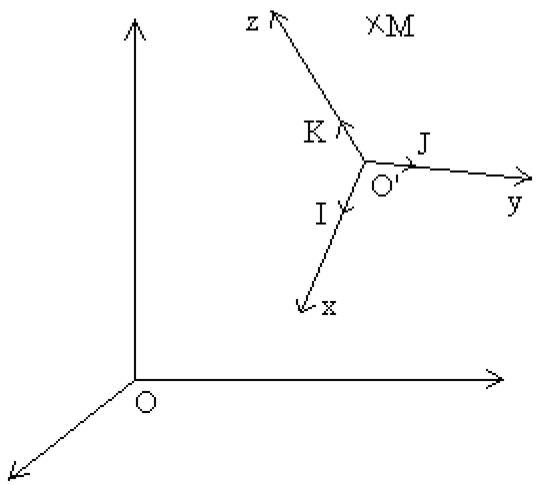
Donc $\dfrac{d\,\vec{I}_2}{dt}_{/\mathcal{R}0} = (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}2/\mathcal{R}1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}1/\mathcal{R}0}) \wedge \vec{I}_2 = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}2/\mathcal{R}0}\wedge\ \vec{I}_2$ d'où $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}2/\mathcal{R}0} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}2/\mathcal{R}1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}1/\mathcal{R}0}$

Rem : Ce résultat de composition des vecteurs rotation est important pour la mécanique des solides.

IV Relations de transformation lors d'un changement de repère

1) Les conditions d'étude

Soit un point dont le mouvement peut être analysé dans le référentiel $\mathcal{R}_o : (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'origine *O* ou dans le référentiel $\mathcal{R} : (O', \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ (**mouvement relatif**) d'origine O'.



Rem 1 : Les rôles de ces deux référentiels sont interchangeables en cinématique, cependant dans le cadre de la dynamique $\mathcal{R}_o$ sera galiléen.

Les deux repères des deux référentiels sont orthonormés et on suppose connue la relation de transformation entre les deux repères.

Rem2 : On dispose donc connue la matrice de transformation T (ou son inverse T^{-1}) permettant de passer d'un repère à l'autre : les repères étant orthonormés cette matrice T a des propriétés particulières.

$$\begin{pmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

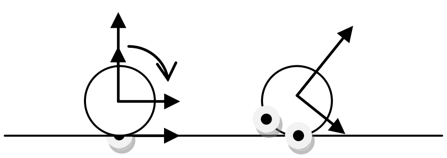
Exemple dans le cas d'un passage de coordonnées polaires ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$) ⇔ cartésiennes ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) : $T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rem3 : Le mouvement de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_o$ se décompose en deux parties : a) le mouvement de O' (translation) et le mouvement de la base de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_o$(rotation)

Rem4 : On considère qu'un point M est fixe dans un référentiel donné $\mathcal{R}$ quand $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{0}$
Si un point est mobile à la fois par rapport à deux référentiels $\mathcal{R}_o$ et $\mathcal{R}$, à chaque instant le point M occupe une position M_0 dans $\mathcal{R}_o$ et $M_{\mathcal{R}}$ dans $\mathcal{R}$:
Par définition, on appelle points coïncidants M_0 et $M_{\mathcal{R}}$, les points correspondant à la position de M, <u>à un instant donné</u>, dans les référentiels $\mathcal{R}_o$ et $\mathcal{R}$.
Il s'ensuit qu, dans le repère correspondant, le point coïncidant est fixe. Ainsi M_0 est fixe dans $\mathcal{R}_o$ et $M_{\mathcal{R}}$ est fixe dans $\mathcal{R}$:
Deux exemples :

<u>Exemple 1 :</u>
Soit un train se déplaçant de Londres à Paris et en considérant le « nez » de la locomotive. A t = 0, départ de la gare de Londres, à t= 1h30, à Calais, t = 3h à Paris Gare du Nord
Dans le référentiel du train : $M = M_{\mathcal{R}}$, le « nez » de la locomotive (toujours au même endroit par rapport au train !)
Dans le référentiel terrestre : $M = M_0$ = Londres à t = 0, M_0 = Calais à t = 1h, M_0 = Paris à t = 3h,
(les villes sont évidemment fixes… par rapport au référentiel terrestre)

<u>Exemple 2 :</u>
Une roue se déplaçant à vitesse constante par rapport au sol :



$\mathcal{R}_o$ = référentiel terrestre => le point coïncidant reste sur l'axe horizontal

*$\mathcal{R}$ = référentiel la roue **avec repère tournant avec la roue** => le point coïncidant reste fixe sur la roue mais par rapport au point de contact avec le sol, il s'est déplacé.*

2) Transformation des positions

Soit la relation vectorielle : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

$$x\,.\,\vec i + y\,.\,\vec j + z\,.\,\vec k = x_{O'}\,.\,\vec i + y_{O'}\,.\,\vec j + z_{O'}\,.\,\vec k + X\,.\,\vec I + Y\,.\,\vec J + Z\,.\,\vec K$$

On a la relation $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_{O'}\\y_{O'}\\z_{O'}\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix}x-x_{O'}\\y-y_{O'}\\z-z_{O'}\end{pmatrix}$ *Voir exemple infra dans l'annexe Application*

3) Transformation des vitesses

Calcul par deux méthodes : soit directement, soit en utilisant les formules de changement de base de dérivation

- Par définition : $\vec v = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,.\,\vec i + \frac{dy}{dt}\,.\,\vec j + \frac{dz}{dt}\,.\,\vec k = \dot x\,.\,\vec i + \dot y\,.\,\vec j + \dot z\,.\,\vec k$

direct (a)	***par formules de changement de base (b)***
$\vec v = \dot x_{O'}\,.\,\vec i + \dot y_{O'}\,.\,\vec j + \dot z_{O'}\,.\,\vec k$ $+ \dot X\,.\,\vec I + \dot Y\,.\,\vec J + \dot Z\,.\,\vec K$ $+ X\,.\,\dot{\vec I} + Y\,.\,\dot{\vec J} + Z\,.\,\dot{\vec K}$ *(1a)* (rappel : repère de dérivation $\mathcal{R}_o$ donc $\vec v_{M/\mathcal{R}0}$) or $\vec v_{M/\mathcal{R}} = \dot X\,.\,\vec I + \dot Y\,.\,\vec J + \dot Z\,.\,\vec K$ et $\vec v_{MR/\mathcal{R}0} = \dot x_{O'}\,.\,\vec i + \dot y_{O'}\,.\,\vec j + \dot z_{O'}\,.\,\vec k$ $+ X\,.\,\dot{\vec I} + Y\,.\,\dot{\vec J} + Z\,.\,\dot{\vec K}$ (M_R est le point coïncidant de M dans le repère $\mathcal{R}$) Relation que l'on peut encore écrire : et $\vec v_{MR/\mathcal{R}0}$ = et $\vec v_{O'/\mathcal{R}0} + \vec\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0} \wedge \overrightarrow{O'M}$ *(2a)* soit en replaçant *(2a) dans (1a) :* $\vec v_{M/\mathcal{R}0} = \vec v_{M/\mathcal{R}} + \vec v_{MR/\mathcal{R}0}$ ou encore $\vec v_{absolue} = \vec v_{relative} + \vec v_{entrainement}$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ par dérivation : $\vec v_{M/\mathcal{R}0} = \vec v_{O'/\mathcal{R}0} + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right/_{\mathcal{R}0}$ *(1b)* or -*cf III c), Formule de changement de base de dérivation –* $\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right/_{\mathcal{R}0} = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right/_{\mathcal{R}} + \vec\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0} \wedge \overrightarrow{O'M}$ Le référentiel de projection étant $\mathcal{R}$, on a donc M = M_R (M_R point coïncidant de M dans le repère $\mathcal{R}$) soit encore : $\left.\frac{d\overrightarrow{O'M_R}}{dt}\right/_{\mathcal{R}0} = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right/_{\mathcal{R}} + \vec\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0} \wedge \overrightarrow{O'M_R}$ $= \vec v_{M/\mathcal{R}} + \vec\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0} \wedge \overrightarrow{O'M_R}$ *(2b)* d'où en définitive, en remettant *(2b)* dans *(1b)* et en considérant que $\vec v_{MR/\mathcal{R}0} = \vec v_{O'/\mathcal{R}0} + \vec\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0} \wedge \overrightarrow{O'M}$ $\vec v_{M/\mathcal{R}0} = \vec v_{M/\mathcal{R}} + \vec v_{MR/\mathcal{R}0}$ <= relation identique !

4) Transformation des accélérations

En reprenant les deux mêmes démarches que pour le traitement de la transformation des vitesses :

direct (a)

$$\vec{v} = \dot{x}_{O'}\,.\,\vec{i} + \dot{y}_{O'}.\,\vec{j} + \dot{z}_{O'}\,.\,\vec{k}$$
$$+ \dot{X}\,.\,\vec{I} + \dot{Y}\,.\,\vec{J} + \dot{Z}\,.\,\vec{K}$$
$$+ X\,.\,\dot{\vec{I}} + Y\,.\,\dot{\vec{J}} + Z\,.\,\dot{\vec{K}} \qquad \textit{(1a)}$$

(rappel : repère de dérivation $\mathcal{R}_o$ donc $\vec{v}_{M/\mathcal{R}0}$)

On dérive la vitesse :

$$\vec{a} = \ddot{x}_{O'}\,.\,\vec{i} + \ddot{y}_{O'}.\,\vec{j} + \ddot{z}_{O'}.\,\vec{k} \qquad \text{(I)}$$
$$+\ddot{X}.\,\vec{I} + \ddot{Y}.\,\vec{J} + \ddot{Z}.\,\vec{K} \qquad \text{(II)}$$
$$+ 2\,(\dot{X}\,.\,\dot{\vec{I}} + \dot{Y}\,.\,\dot{\vec{J}} + \dot{Z}\,.\,\dot{\vec{K}}) \qquad \text{(III)}$$
$$+ X\,.\,\ddot{\vec{I}} + Y\,.\,\ddot{\vec{J}} + Z\,.\,\ddot{\vec{K}} \qquad \text{(IV)}$$

Analysons chacun des termes de cette expression :

- Le terme (II) ne fait intervenir que l'accélération du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$: il s'agit de

  <u>l'accélération relative</u> $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$

- Les termes (I) et (IV) ne font intervenir que le mouvement de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_o$: il s'agit de

  <u>l'accélération d'entrainement</u> $\vec{a}_{MR/\mathcal{R}0}$

- Le terme (III) est une combinaison du mouvement du point M dans $\mathcal{R}$ et du mouvement de rotation de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_o$:ce terme est appelée **<u>l'accélération de Coriolis</u>** $\vec{a}_{M/\mathcal{R}/\mathcal{R}0}$

soit : $\vec{a}_{M/\mathcal{R}0} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}} + \vec{a}_{MR/\mathcal{R}0} + \vec{a}_{M/\mathcal{R}/\mathcal{R}0}$

ou encore $\quad \vec{a}_{\text{absolue}} = \vec{a}_{\text{relative}} + \vec{a}_{\text{entrainement}} + \vec{a}_{\text{Coriolis}}$

par formules de changement de base (b)

Partons de l'expression de la vitesse :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}0} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}} + \vec{v}_{O'/\mathcal{R}0} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0} \wedge \overrightarrow{O'M}_R$$

en dérivant :

$$\vec{a} = \left.\frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt}\right/_{\mathcal{R}0} + \left.\frac{d\vec{v}_{O'/R0}}{dt}\right/_{\mathcal{R}0}$$

$$+ \left.\frac{d\vec{\Omega}_{R/R0}}{dt}\right/_{\mathcal{R}0} \wedge \overrightarrow{O'M}_R + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}_R}{dt}\right/_{\mathcal{R}0}$$

or -*cf III c), Formule de changement de base de dérivation –*

$$\left.\frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt}\right/_{\mathcal{R}0} = \left.\frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt}\right/_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

et

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}_R}{dt}\right/_{\mathcal{R}0} = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}_R}{dt}\right/_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0} \wedge \overrightarrow{O'M}_R$$

On retrouve les différents termes ci-contre :

- Le terme (II) ne fait intervenir que l'accélération du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$: il s'agit de ***<u>l'accélération relative</u>***

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt}\right/_{\mathcal{R}}$$

- Les termes (I) et (IV) ne faisanat intervenir que le mouvement de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_o$: il s'agit de **<u>l'accélération d'entrainement</u>**

$$\vec{a}_{MR/\mathcal{R}0} = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}0}$$
$$+ \left.\frac{d\vec{\Omega}_{R/R0}}{dt}\right/_{\mathcal{R}0} \wedge \overrightarrow{O'M}_R \quad \text{(terme du à la variation de } \Omega\text{)}$$
$$+ \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0} \wedge \overrightarrow{O'M}_R) \quad \text{(terme centripète)}$$

- Et le dernier terme : **<u>l'accélération de Coriolis</u>**

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}/\mathcal{R}0} = 2\,(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0} \wedge \vec{v}_{MR/\mathcal{R}})$$

<u>Ce terme est nul quand le point est au repos dans $\mathcal{R}$!</u>

V Quelques applications

On va supposer dans chacun des exemples étudiés que le référentiel de « départ » $\mathcal{R}_o$ est galiléen , l'autre référentiel $\mathcal{R}$ étant quelconque

1) Intérêt que $\mathcal{R}$ soit en translation par rapport à $\mathcal{R}_o$

Le fait que les deux référentiels soient translation (*les axes des deux repères restent parallèles entre eux pendant tout le mouvement*) entraîne qu'il n'y a pas de terme de rotation ($\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0} = \vec{0}$)

a) Transformation des vitesses

Dans ce cas simple, la vitesse d'entraînement se limite à la vitesse de l'origine O' du référentiel $\mathcal{R}$ d'où la formule simple : $\vec{v}_{M/\mathcal{R}0} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}} + \vec{v}_{R/\mathcal{R}0}$ avec $\vec{v}_{R/\mathcal{R}0} = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}0}$

b) Transformation des accélérations

De la même façon, la loi de composition des vitesses se simplifie beaucoup (notamment pas de terme de Coriolis)

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}0} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}} + \vec{a}_{R/\mathcal{R}0} \quad \text{avec} \quad \vec{a}_{R/\mathcal{R}0} = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}0}$$

Si de plus, le référentiel est en **<u>translation rectiligne uniforme</u>** (=> $\vec{v}_{R/\mathcal{R}0} = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}0}$= Cste) alors $\vec{a}_{M/\mathcal{R}0} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}}$
C'est ce résultat qui permet de dire que tout référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est également galiléen.

Rem : A l'inverse un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen, n'est pas galiléen (exemple du référentiel barycentrique ou encore du référentiel géocentrique, etc.) : il faut que le référentiel soit en ***<u>translation rectiligne uniforme</u>***

2) Etude de mouvement dans un référentiel non galiléen

a) Cas général : L'équation du mouvement se détermine généralement par l'écriture de la seconde loi de Newton : $\Sigma\vec{f}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m.\vec{a}$ (si m = cste) mais **<u>cette relation n'est valide que dans un référentiel galiléen</u>**.

Dans un référentiel non galiléen, il suffit d'utiliser la relation établie supra :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}0} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}} + \vec{a}_{MR/\mathcal{R}0} + \vec{a}_{M/\mathcal{R}/\mathcal{R}0} = \vec{a}_{relative} + \vec{a}_{entrainement} + \vec{a}_{Coriolis}$$

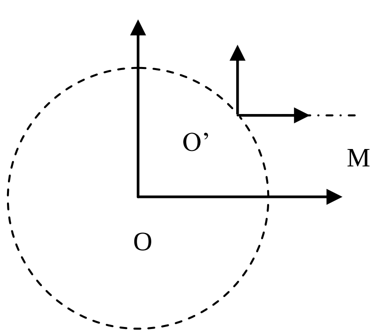
la seconde loi de Newton s'écrit alors : $\Sigma\vec{f}_{ext} - m\,(\vec{a}_{entrainement} + \vec{a}_{Coriolis}) = m.\,\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$

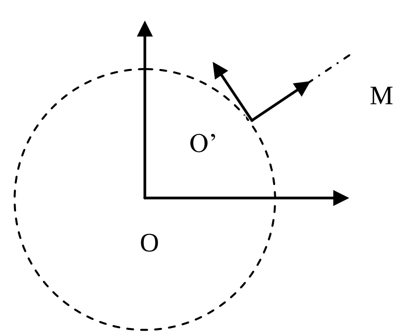
b) Cas particulier : étude d'équilibre dans un référentiel non galiléen

Si le système est en équilibre dans le référentiel non galiléen, le terme de Coriolis est nul. La condition d'équilibre s'écrit alors $\Sigma\vec{f}_{ext} - m\,.\,\vec{a}_{entrainement} = \vec{0}$

3) Deux exemples analogues avec un référentiel soit en translation $\mathcal{R}$ et soit en rotation $\mathcal{R}$' par à $\mathcal{R}_0$

Soit un mouvement plan d'un point M dans un référentiel dont l'origine O' tourne d'un mouvement circulaire uniforme dans le référentiel terrestre (supposé galiléen). Dans le premier cas (1) , le référentiel reste en translation par rapport au référentiel terrestre, dans le second cas (2), il tourne autour de l'origine O'





Dans les deux cas :

Dans $\mathcal{R}_o$: $\vec{OO'} \begin{pmatrix} R\cos(\omega.t) \\ R\sin(\omega.t) \end{pmatrix}$ Dans $\mathcal{R}$: $\vec{O'M} \begin{pmatrix} R' \\ 0 \end{pmatrix}$ (donc point fixe dans $\mathcal{R}$)

cas (1) *$\mathcal{R}$ en translation par rapport à $\mathcal{R}_o$*	cas (2) *$\mathcal{R}'$ en rotation par rapport à $\mathcal{R}_o$*
$\begin{pmatrix}\vec I\\ \vec J\\ \vec K\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\vec i\\ \vec j\\ \vec k\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\vec I\\ \vec J\\ \vec K\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\vec i\\ \vec j\\ \vec k\end{pmatrix}$ avec $\theta = \omega' t$
donc $\vec\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0} = \vec 0$	en remarquant que $\frac{d\vec I}{dt} = \frac{d\vec I}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}.\vec J = \omega'.\vec J$ (car $\frac{d\theta}{dt} = \omega'$) et de même : $\frac{d\vec J}{dt} = -\omega'\vec I$ d'où on obtient (*voir supra III b*) : $a = \frac{d\vec J}{dt}.\vec K = 0$ $b = \frac{d\vec K}{dt}\vec I = 0$ et $c = \frac{d\vec I}{dt}.\vec J = \omega'$ d'où $\vec\Omega \begin{pmatrix}0\\0\\ \omega'\end{pmatrix}$
étude des vitesses Dans les deux cas, le point M est au repos dans R donc pas d'accélération relative : $\vec v_{M/\mathcal{R}} = \vec 0$	
$\vec v_{M/\mathcal{R}0} = \vec v_{M/\mathcal{R}} + \vec v_{R/\mathcal{R}0}$ avec $\vec v_{R/\mathcal{R}0} = \vec v_{O'/\mathcal{R}0}$ donc $\vec v_{M/\mathcal{R}0} = \vec v_{O'/\mathcal{R}0} = \begin{pmatrix}-R.\omega\sin(\omega t)\\ R.\omega\cos(\omega t)\end{pmatrix}$	$\vec v_{M/\mathcal{R}0} = \vec v_{M/\mathcal{R}} + \vec v_{R/\mathcal{R}0}$ avec $\vec v_{R/\mathcal{R}0} = \vec v_{O'/\mathcal{R}0} + \vec\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0}\wedge\overrightarrow{O'M}_R$ or dans $\mathcal{R}$: $\vec\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0}\wedge\overrightarrow{O'M}_R = R'\omega'.\vec J$ $= R'\omega'[-\sin(\omega' t)\vec i + \cos(\omega' t)\vec j]$ donc $\vec v_{M/\mathcal{R}0} = \begin{pmatrix}-R.\omega\sin(\omega t) - R'.\omega'\sin(\omega'.t)\\ R.\omega\cos(\omega t) + R'.\omega'\cos(\omega'.t)\end{pmatrix}$
étude des accélérations Dans les deux cas, le point M est au repos dans R donc pas d'accélération relative : $\vec a_{M/\mathcal{R}} = \vec 0$	
Par ailleurs, le référentiel R étant en translation, pas de terme de Coriolis et le terme d'entraînement se limite à l'accélération de O' soit : $\vec a_{M/\mathcal{R}0} = \vec a_{O'/\mathcal{R}0} = \begin{pmatrix}-R\,\omega^2\cos(\omega.t)\\ -R\,\omega^2\sin(\omega.t)\end{pmatrix}$	L'accélération de Coriolis est nulle puisque le point M est au repos dans le référentiel R L'accélération d'entraînement ne fait pas intervenir le terme de variation de $\vec\Omega$ puisque $\vec\Omega$ = Cste : il ne reste que les deux termes : $\vec a_{O'/\mathcal{R}0} + \vec\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0}\wedge(\vec\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0}\wedge\overrightarrow{O'M}_R)$ avec $\vec\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0}\wedge(\vec\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0}\wedge\overrightarrow{O'M}_R) = -R'\omega'^2.\vec I$ $= -R'\omega'^2[\cos(\omega' t)\vec i + \sin(\omega' t)\vec j]$ d'où $\vec a_{M/\mathcal{R}0} = \begin{pmatrix}-\omega^2 R.\cos(\omega t) - \omega'^2 R'.\cos(\omega' t)\\ -\omega^2 R.\sin(\omega t) - \omega'^2 R'.\sin(\omega' t)\end{pmatrix}$

<u>Calcul direct dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_o$</u> On retrouve tous ces résultats en exprimant dans chaque situation, les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}_o$

cas (1)		cas(2)	
$\overrightarrow{OM}$	$\begin{cases} x = R.\cos(\omega t) + R' \\ y = R.\sin(\omega t)\end{cases}$	$\overrightarrow{OM}$	$\begin{cases} x = R.\cos(\omega t) + R'.\cos(\omega' t) \\ y = R.\sin(\omega t) + R'.\sin(\omega' t)\end{cases}$
$\vec v$	$\begin{cases} v_x = -R.\omega\sin(\omega t) \\ v_y = R.\omega\cos(\omega t)\end{cases}$	$\vec v$	$\begin{cases} v_x = -R.\omega\sin(\omega t) - R'.\omega'\sin(\omega' t) \\ v_y = R.\omega\cos(\omega t) + R'.\omega'\cos(\omega' t)\end{cases}$
$\vec a$	$\begin{cases} a_x = -\omega^2 R.\cos(\omega t) \\ a_y = -\omega^2 R.\sin(\omega t)\end{cases}$	$\vec a$	$\begin{cases} a_x = -\omega^2 R.\cos(\omega t) - \omega'^2 R'.\cos(\omega' t) \\ a_y = -\omega^2 R.\sin(\omega t) - \omega'^2 R'.\sin(\omega' t)\end{cases}$

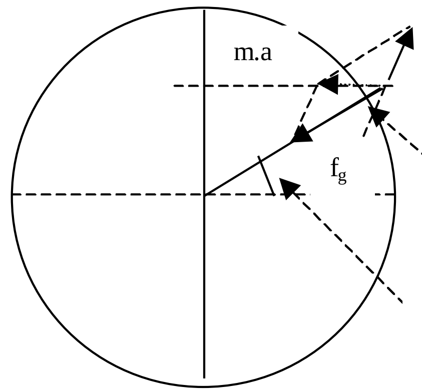
4) Etude du poids : référentiel terrestre ⇔ référentiel géocentrique

Par définition, poids = force de gravitation due à la terre **<u>mesurée dans le repère terrestre</u>** => $\vec{P} = m_G . \vec{g}$

En première approximation : on peut considérer que $\vec{P} = \vec{f_g} = \vec{f}_{\text{Terre/objet}}$ => $\vec{g} = -\mathcal{G}\,\frac{m_{Terre}}{r^2}\,\vec{u}$ avec $\vec{u} = \frac{\vec{OI}}{r}$

(*avec O : centre –d'inertie !- de la Terre et I : centre d'inertie de l'objet)*

- Limitation : le référentiel terrestre n'est pas galiléen, le référentiel géocentrique est un meilleur référentiel galiléen
- Correction : en considérant un « fil à plomb » (masse accrochée à un fil), par définition du poids, la condition d'équilibre s'écrit $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ en se plaçant **dans le référentiel terrestre**. Or



$\vec{f_g} + \vec{R} = \vec{0}$ si on considère le référentiel comme galiléen

$\vec{f_g} + \vec{R} - m.\vec{a}_{entrainement} = \vec{0}$ en le considérant non galiléen

Donc en toute rigueur : $\vec{P} = \vec{f_g} - m.\vec{a}_{entrainement}$

*Rem : On arrive au même résultat en se plaçant **dans le référentiel géocentrique (considéré galiléen) et en écrivant la deuxième loi de Newton :*** $\vec{R} + \vec{f_g} = m.\vec{a}$ *(schéma ci-contre)*

- Calcul du terme correctif : $a = \omega^2 . r$, et $r = R_T.\cos\lambda$ $\quad \omega = \frac{2.\pi}{T}$ $\quad$ T = 24 h = 86400 s

Ordre de grandeur : à Paris, $\lambda \approx 45°$, $\frac{a}{g} = 4(\frac{\pi}{T})^2\frac{R_T}{g}\cos(\lambda) \approx 0{,}24\ \%$

calcul de α (écart angulaire de la verticale au rayon) :
dans le triangle construit sur R et m.a :

$\frac{\sin\alpha}{\omega^2 . R_T.\cos\lambda} = \frac{\sin\lambda}{g}$ => $\sin\alpha = \frac{\omega^2 . R_T}{2.g}\sin(2\lambda) = 2(\frac{\pi}{T})^2\frac{R_T}{g}\sin(2\lambda) = 1{,}8.10^{-4}\sin(2\lambda)$ (*en rad*) $= 5{,}9'.\sin(2\lambda)$ (*en degré*)

donc $\alpha = 0$ pour $\lambda = 0$ (équateur) et $\frac{\pi}{2}$ (pôle) et est maxi pour $\lambda = \pm\frac{\pi}{4}$

Ordre de grandeur : à Paris, $\lambda \approx 45°$ (plutôt Bordeaux) , $\sin\alpha \approx \alpha \approx 1{,}8.10^{-4}$ rad = 5,9'

Dans l'étude ci dessus, la situation considérée est un équilibre dans le référentiel terrestre (non galiléen) donc pas de pb d'accélération de Coriolis. La situation se complique lorsque l'on étudie un mouvement (chute libre, pendule, etc.)

<u>Pour ceux qui veulent en savoir plus</u>*, voir l'importance de l'accélération de Coriolis :*

a) dans le cas de la chute sur une grande distance (déviation vers l'est dans l'hémisphère Nord)
http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/RefTerre/Deviation1.html
b) dans le cas du pendule de Foucault
http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/RefTerre/Foucault0.html
c) dans le cas des cyclones
http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/RefTerre/Depressions.html

Toutes les animations sur le référentiel terrestre :

http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/RefTerre/Index_RefTer.html

Sur l'accélération de Coriolis avec une étude théorique assez détaillée :

http://planet-terre.ens-lyon.fr/planetterre/XML/db/planetterre/metadata/LOM-force-de-coriolis.xml

http://fr.wikipedia.org/wiki/Force_de_Coriolis