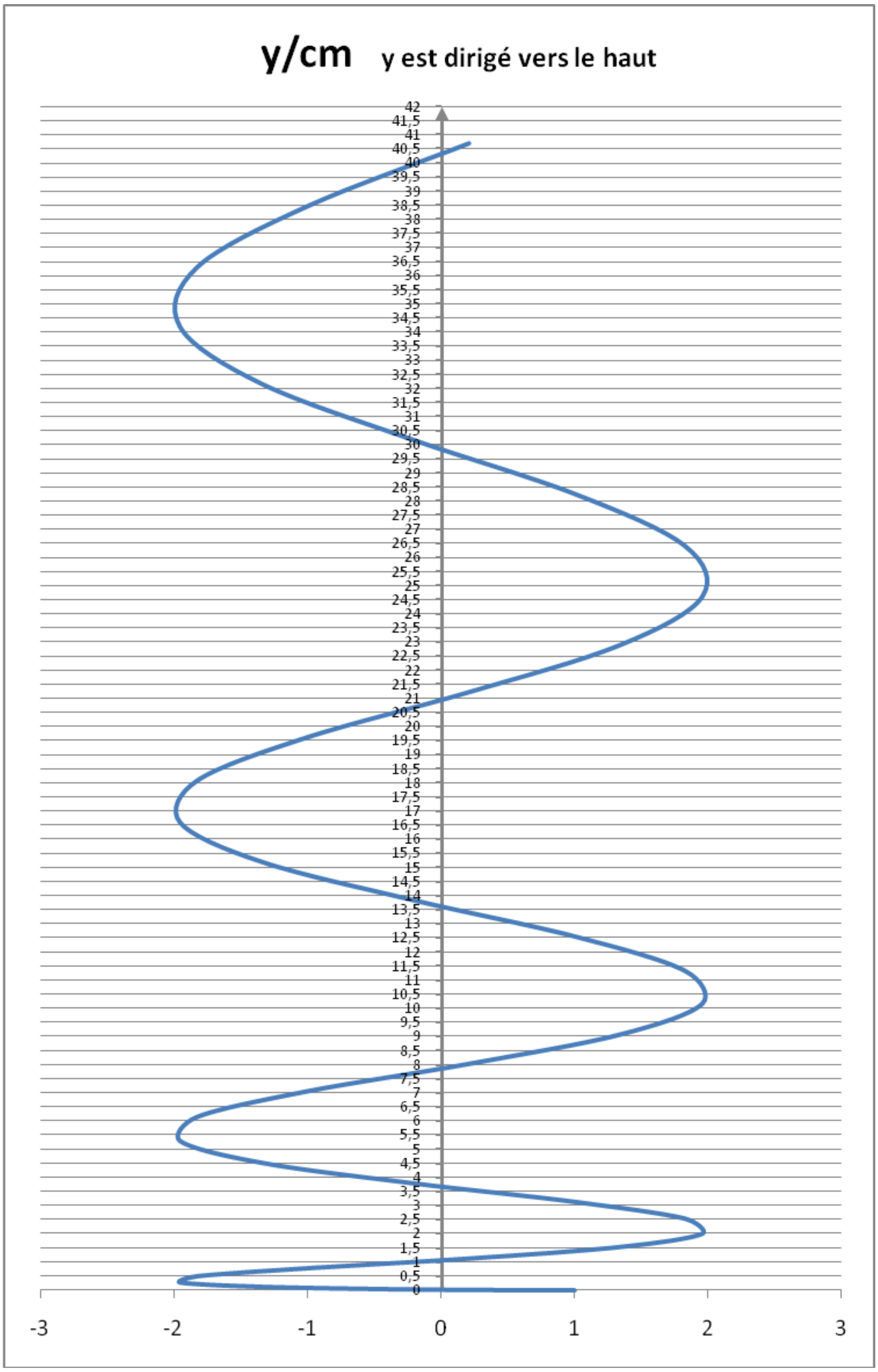
Correction *Exercices TP chute libre*

La lame vibrante

Une plaque sur laquelle est fixée une feuille de papier peut tomber suivant une guillotine. Un crayon solidaire d'une lame vibrante oscillant suivant un mouvement périodique de période T laisse une trace sur le papier. On laisse tomber la plaque pendant que la lame oscille : on obtient le document ci-dessous.



Question : Déterminer la valeur de g

Correction

Les points d'intersection avec les axes se font à intervalle régulier $\tau =$ T/2, ils sont tels que :
En prenant pour t' = 0 le premier passage sur l'axe :

t/s	0	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2	0,24	
y/cm	1,1	3,7	7,9	13,6	21,0	29,8	40,3	

On a donc ci-dessus les données expérimentales. Il faut maintenant en déduire la valeur de g en s'appuyant sur « l'Aide » donnée.
Démonstration de la « suite arithmétique »

$$Y = f(t)$$

$$\text{Si } y = 1/g^*t^2 + v_o{}^*t$$

Soit t'_0 la date du premier de rencontre avec l'axe des x (*raisonnement général : on prendra ensuite $t'_0 = 0$*)

$y_0 = 1/g^*t'^2_0 + v_o{}^*\, t'_0$

Soit $t'_1 = t'_0 + T/2$ la date du premier point de rencontre avec l'axe des x $\quad y_1 = 1/g\, t'^2_1 + v_o{}^*\, t'_1$

Soit $\quad y_1 = 1/g^*(t'_0+T/2)^2 + v_o{}^*\,(t'_0+T/2)$

……

Soit $t'_{i-1} = t'_0+(i-1)\,{}^*T/2$ la date du i_ème- 1 point de rencontre avec l'axe des x

$y_{i-1} = 1/g\, t'^2_{i-1} + v_o{}^*\, t'_{i-1}$

$y_{i-1} = 1/g^*(t'_0+(i-1)\,{}^*\,T/2)^2 + v_o{}^*\,(t'_0+(i-1)^*T/2)$

Soit t'_i l= $t'_0+i\,{}^*T/2$ la date du i_ème point de rencontre avec l'axe des x

$y_i = 1/g\, t'^2_i + v_o{}^*\, t'_i$

$y_i = 1/g^*(t'_0+ i\,{}^*\,T/2)^2 + v_o{}^*\,(t'_0+i\,{}^*T/2)$

Soit t'_{i+1} l= $t'_0+(i+1)\,{}^*T/2$ la date du i_ème+ 1 point de rencontre avec l'axe des x

$y_{i+1} = 1/g\, t'^2_{i+1} + v_o{}^*\, t'_{i°1}$

$y_{i+1} = 1/g^*(t'_0+(i+1)\,{}^*\,T/2)^2 + v_o{}^*\,(t'_0+(i+1)^*T/2)$

Posons : (les d_i représentent les ***distances successives entre les passages par l'axe des y***)

$\boldsymbol{d_1} = y_1 - y_0 \quad = ½\, g\,(t'_1 - t'_0)^2 + v_o{}^*\,(t'_1 - t'_0) \quad = ½\, g^*\, T/2^*(t'_1 + t'_0) + v_o{}^*\, T/2 \quad \boldsymbol{= ½\, g^*\, T^*(t'_1 - T/2) + v_o{}^*\, T/2} \quad$ si $t'_0 = 0$

ou $\quad = ½\, g^*\, T/2^*\,(2^*t'_0+T/2) + v_o{}^*\, T/2 = g/4\,{}^*\,T\,{}^*(2^*t'_0+T/2) + v_o{}^*\, T/2$

…

$\boldsymbol{d_i} = y_i - y_{i-1} \quad = \quad ½\, g\,(t'_i - t'_{i-1})^2 + v_o{}^*\,(t'_i - t'_{i-1}) = = ½\, g^*\, T/2^*(t'_i + t'_{i-1}) + v_o{}^*\,(t'_i - t'_{i-1}) \quad \boldsymbol{= ½\, g^*\, T^*(t'_i - T/2) + v_o{}^*\, T/2}$

ou $\quad = \quad ½\, g^*\, T/2^*(t'_i + t'_{i-1}) + v_o{}^*\, T/2$

de même :

$\boldsymbol{d_{i+1}} = y_{i+1} - y_i \quad = ½\, g\,(t'_{i+1} - t'_i)^2 + v_o{}^*\,(t'_{i+1} - t'_i) = = ½\, g^*\, T/2^*(t'_{i+1} + t'_i) + v_o{}^*\,(t'_{i+1} - t'_i) \quad \boldsymbol{= ½\, g^*\, T^*(t'_{i+1} - T/2) + v_o{}^*\, T/2}$

ou $\quad = \quad ½\, g^*\, T/2^*(t'_{i+1} + t'_i) + v_o{}^*\, T/2$

donc détermination de g

1) Première méthode :

les d_i forment une suite arithmétique de raison $r = d_{i+1} - d_i = ½\, g^*\, T/2^*(t'_{i+1} - t'_{i-1}) = ½\, g^*\, T/2^*T = g^*T^2/4$

donc $d_i = d_0 + i\,{}^*\, r$

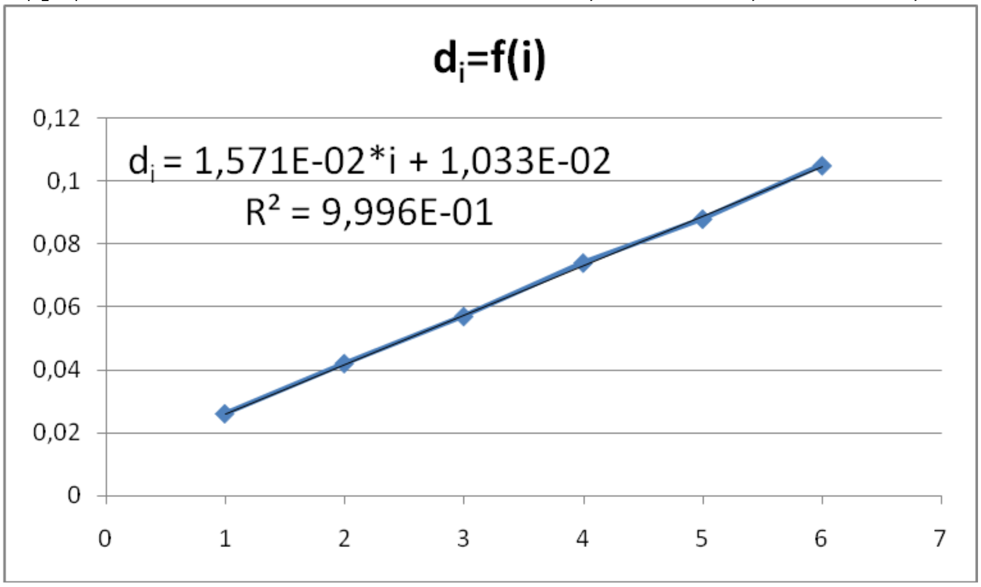
et on peut étudier $\quad d = f(i) \quad$ droite de pente $a = r = g.{}^*T^2/4 \quad$ $\boldsymbol{\Rightarrow g = 4^*a/T^2}$

2) Deuxième méthode : : $\quad$ on voit ci-dessus que $\boldsymbol{d_i = ½\, g^*\, T^*(t'_i - T/2) + v_o{}^*\, T/2}$

Donc on peut étudier : $\quad d = f(t') \quad \Rightarrow$ droite de pente $a = ½\, g.{}^*T \quad$ $\boldsymbol{\Rightarrow g = 2^*a/T}$

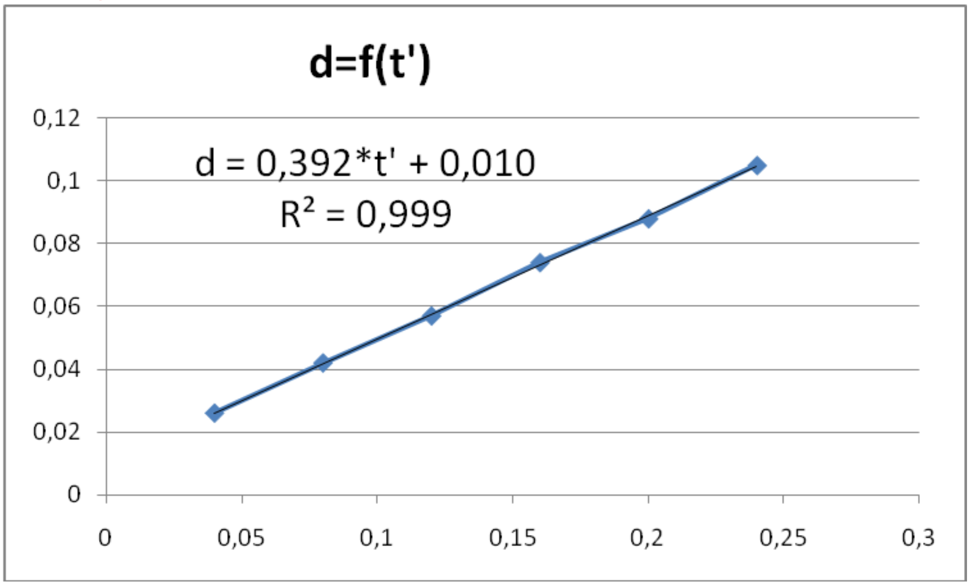
Les deux méthodes utilisent la relation mathématique spécifique (suite arithmétique) relative aux distances parcourues en des durées égales. C'est une approche différente de celle vue en cours et TP : en cours-TP, on cherchait à trouver les relations v⇔ t et y ⇔ t. Ici on suppose connues ces relations et on les utilise pour trouver g !

i		1	2	3	4	5	6
t	0	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2	0,24
y/cm	1,1	3,7	7,9	13,6	21	29,8	40,3
d/m	0	0,026	0,042	0,057	0,074	0,088	0,105
$d_{i+1}-d_i$			0,016	0,015	0,017	0,014	0,017



Première méthode : pente 0,01571 m

g = 4*a/T2 9,821 m/s2



Deuxième méthode : pente 0,3928 m/s

g = 2*T/a 9,821 m/s2

La chute dans le tube

1) Relation cinématique de la chute libre : $z = ½\, g\, t^2 + v_0 \,.\, t$ (z'z orienté vers le bas et evidemment : $z = ½\, g\, t^2$ si $v_0 = 0$)
2) En suivant l'aide fournie :
   en A : $z_A = ½\, g\, t_A^2 + v_0 \,.\, t_A$:
   en B : $z_B = ½\, g\, t_B^2 + v_0 \,.\, t_B$:
   en C : $z_B = ½\, g\, t_C^2 + v_0 \,.\, t_C$

Or $h_1 = z_B - z_A = [½\, g\, (t_B + t_A) + v_0\,]\,(t_B - t_A)$ et $h_2 = z_C - z_B = [½\, g\, (t_C + t_B) + v_0\,]\,(t_C - t_A)$

De plus : $t_1 = (t_B - t_A)$ (2) et $t_2 = (t_C - t_B)$ (3)

Donc $\frac{h_2}{t_2} - \frac{h_1}{t_1} = ½\, g\, (t_C - t_A)$ or d'après (2) et (3) : $(t_C - t_A) = (t_1 + t_2)$ d'où la relation : $g = \dfrac{2\left(\frac{h_2}{t_2} - \frac{h_1}{t_1}\right)}{t_2 + t_1}$

3) L'expression de g montre que s_0 et v_0 n'interviennent pas !
   Pour s'en convaincre, on peut observer que dans tout le raisonnement s_0 n'intervient pas. Par ailleurs, le raisonnement fait ci-dessus dans le cas général montre que si v_0 est différent de 0, la vitesse s'annule en soustrayant $\frac{h_2}{t_2} - \frac{h_1}{t_1}$.

4) Application numérique $g = \dfrac{2\left(\frac{h_2}{t_2} - \frac{h_1}{t_1}\right)}{t_2 + t_1} = \quad = 9{,}76935\ldots\ldots$ m.s^{-2}

   Détermination de l'incertitude relative (*d'après les formules données en annexe*) :

$$\left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 = \left(\frac{\Delta\left(\frac{h_2}{t_2} - \frac{h_1}{t_1}\right)}{\frac{h_2}{t_2} - \frac{h_1}{t_1}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta(t_1 + t_2)}{t_1 + t_2}\right)^2 \quad \text{or } \Delta(t_1 + t_2)^2 = 2\,\Delta t^2$$

$$\text{Et } \Delta\left(\frac{h_2}{t_2} - \frac{h_1}{t_1}\right)^2 = \Delta\left(\frac{h_2}{t_2}\right)^2 + \Delta\left(\frac{h_1}{t_1}\right)^2 = \left(\frac{h_2}{t_2}\right)^2\left[\left(\frac{\Delta h}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t_2}\right)^2\right] + \left(\frac{h_1}{t_1}\right)^2\left[\left(\frac{\Delta h}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t_1}\right)^2\right] = \Delta h^2\left(\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2}\right) + \Delta t^2\left(\frac{h_1^2}{t_1^4} + \frac{h_2^2}{t_2^4}\right)$$

$$\left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 = \left(\frac{2}{(t_1 + t_2)}\right)^2 \text{x} \left\{\left(\frac{1}{g}\right)^2\left[\Delta h^2\left(\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2}\right) + \Delta t^2\left(\frac{h_1^2}{t_1^4} + \frac{h_2^2}{t_2^4}\right)\right] + \frac{\Delta t^2}{2}\right\}$$

AN : $\left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 = 5{,}348\,.10^{-3}$ => $\frac{\Delta g}{g} = 7{,}3\,.10^{-2}$ (7,3% !) $\Delta g = 0{,}71$ m.s^{-2}

Etude avec Maple

```
> with(ScientificErrorAnalysis) : # exercice sur la chute libre
> t1 := Quantity(0.135, 0.002) :
> t2 := Quantity(0.116, 0.002) :
> combine(t1 + t2, errors);
                    Quantity(0.251, 0.002828427125)
> h1 := Quantity(0.30, 0.005) :
> h2 := Quantity(0.40, 0.005) :
>
> combine(2·(h2/t2 - h1/t1)/(t1 + t2), errors);
                    Quantity(9.769351714, 0.7371023627)
>
```