Mais d'où vient le $\sqrt{12}$?

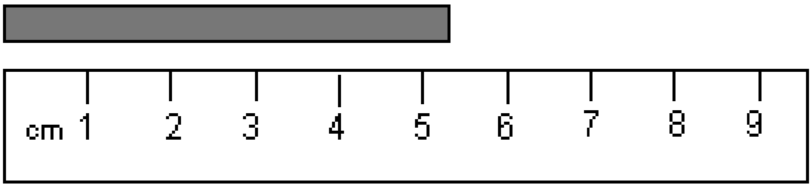
Objectif : On a vu en cours (*voir Doc dans le Cahier de texte*) que, lors du mesurage unique d'une grandeur avec un instrument gradué, on prenait comme estimation de l'incertitude absolue :

$$u(X) = \frac{1}{\sqrt{12}} \text{ (la plus petite graduation)}$$

On se propose dans cette Activité , dans une situation expérimentale simple, de légitimer ce $\sqrt{12}$.

Situation expérimentale :

Prenons comme exemple la mesure d'une longueur avec une règle graduée au centimètre (voir schéma ci-dessous):



La longueur mesurée (L) est assurément supérieure à 5 cm et inférieure à 6 cm. On écrit L = 5,5 cm. Comment évaluer l'incertitude de cette mesure?

Lorsqu'on écrit L = 5,5 cm, on a estimé les limites inférieure et supérieure pour L. On est sûr et certain que le résultat se situe dans l'intervalle [5,0 cm; 6,0 cm], mais on ne sait rien d'autre. La probabilité pour que la valeur de L soit située dans l'intervalle compris entre 5,0 cm et 6,0 cm est égale à 1; elle est égale à zéro en dehors de cet intervalle. On ne possède aucune connaissance spécifique sur les valeurs possibles de L à l'intérieur de l'intervalle, on peut seulement supposer que ***cette valeur se situe d'une manière également probable en tout point de l'intervalle.***

Pour calculer l'incertitude sur L, il faut calculer l'écart-type d'une série de mesures où tous les résultats sur l'intervalle [5,0 cm; 6,0 cm] sont équiprobables.

1°) Evaluation de la moyenne et de l'écart-type

Premier cas: échantillonnage de 0,1 cm:
11 mesures: 5,0 cm; 5,1 cm; 5,2 cm; 5,3 cm; 5,4 cm; 5,5 cm; 5,6 cm; 5,7 cm; 5,8 cm; 5,9 cm; 6,0 cm.
Chaque mesure étant équiprobable, elle n'apparaît qu'une fois dans la liste.

- Dans le logiciel Excel, faire calculer la valeur moyenne et l'écart-type de ces mesures.

Noter les résultats dans le tableau placé en fin de document.

Deuxième cas: échantillonnage de 0,05 cm:
21 mesures: 5,00 cm; 5,05 cm; 5,10 cm; 5,15 cm; .... 5,85 cm; 5,90 cm; 5,95 cm; 6,00 cm.

- Dans le logiciel Excel, faire calculer la valeur moyenne et l'écart-type de ces mesures.

Noter les résultats dans le tableau.

Troisième cas: échantillonnage de 0,02 cm:
51 mesures: 5,00 cm; 5,02 cm; 5,04 cm; 5,06 cm; 5,08 cm; 5,10 cm;........ 5,94 cm; 5,96 cm; 5,98 cm; 6,00 cm.

- Dans le logiciel Excel, faire calculer la valeur moyenne et l'écart-type de ces mesures.

Noter les résultats dans le tableau.

Continuer ainsi pour un échantillonnage de 0,01 cm 0.005 cm 0.002 cm et 0.001cm et compléter toutes les cellules du tableau.

Tableau de résultats :

Echantillonnage (cm)	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
Moyenne (cm)							
Ecart-type (cm)							

2°) ***Evaluation de la valeur limite de l'écart-type***

- Dans le logiciel Excel, tracer la courbe représentant les valeurs de l'écart-type en fonction de la valeur de l'échantillonnage. $\sigma = f\,(ech)$
- Indiquer l'allure de la courbe obtenue et la nature de la courbe de tendance.
- Faire calculer par le logiciel Excel l'équation de la courbe de tendance et donner l'équation obtenue (régression linéaire). On indiquera les valeurs des différents coefficients avec 4 chiffres significatifs.
- L'ordonnée à l'origine est la valeur limite de l'écart-type, lors d'un échantillonnage infiniment précis. Donc c'est la valeur de l'écart-type lorsque n'importe quelle valeur dans l'intervalle [5,0 cm; 6,0 cm] peut être le résultat de la mesure, ***toutes les valeurs étant équiprobables***.
- Comparer la valeur de l'ordonnée à l'origine avec $\frac{1}{\sqrt{12}}$.
- Conclusion : quelle est estimation de l'incertitude absolue u(***L***) sur un longueur ***L*** mesurée avec une règle graduée au cm ?

Généralisation :

D'une manière générale, on pourra retenir que pour un instrument gradué :
$u(X) = \frac{1}{\sqrt{12}}$ ***(la plus petite graduation)***

Exemple 1 *graduation au mm* $u(d) = \frac{1}{\sqrt{12}}\,1\text{ mm} = 0{,}3\text{ mm} = 0{,}03\text{ cm}$

Exemple 2 *graduation au °C* $u(\theta) = \frac{1}{\sqrt{12}}\,1\text{ °C} = 0{,}3\text{ °C}$

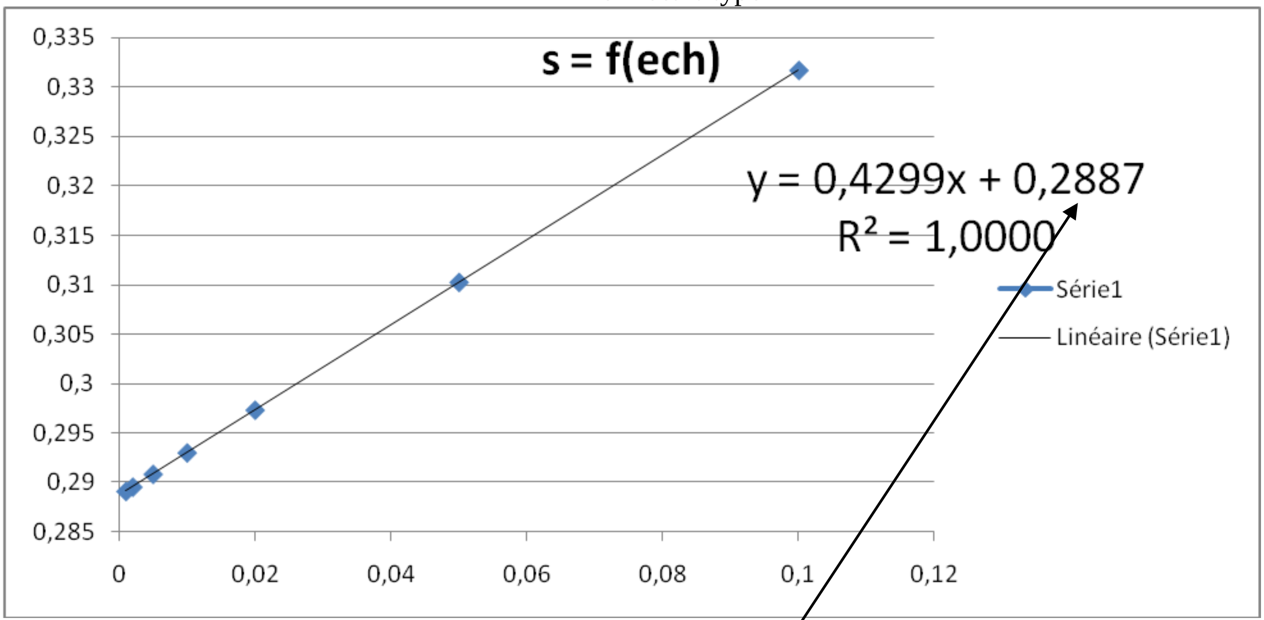
Exemple 3 *graduation au 0,1 mL* $u(V) = \frac{1}{\sqrt{12}}\,0{,}1\text{ mL} = 0{,}03\text{ mL}$

Mais d'où vient le $\sqrt{12}$?

Correction

ech	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
moy	5,5	5,50	5,50	5,50	5,500	5,500	5,500
ecart	0,33166	0,31024	0,29732	0,293	0,29084	0,28954	0,28911

s = écart-type



Remarque :

$\frac{1}{\sqrt{12}} = 0{,}2887$

donc l'écart-type tend vers $\frac{1}{\sqrt{12}}$ quand l'échantillonnage tend vers zéro ! (pour loi de probabilité uniforme)