$\sqrt{12}$ *ou* $\sqrt{24}$ **?**

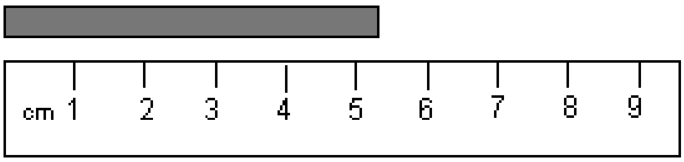
Objectif : On a vu en cours (*voir Doc dans le Cahier de texte et Activité* $\sqrt{12}$ *en Première S*) que, lors du mesurage unique d'une grandeur G avec un instrument gradué, on prenait comme estimation de l'incertitude type :

$$u(G) = \frac{1}{\sqrt{12}} \text{ (la plus petite graduation)}$$

On se propose dans cette Activité , de voir que ce $\sqrt{12}$ est associée à une loi de probabilité et que, si on change de loi de probabilité, cette valeur change.

Situation expérimentale :

Prenons comme exemple la mesure d'une longueur avec une règle graduée au centimètre (voir schéma ci-dessous):



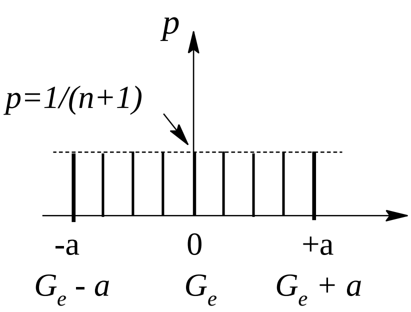
La longueur mesurée (*L*) est assurément supérieure à 5 cm et inférieure à 6 cm. On écrit *L* = 5,5 cm. Comment évaluer l'incertitude de cette mesure?

Lorsqu'on écrit *L* = 5,5 cm, on a estimé les limites inférieure et supérieure pour L. On est sûr et certain que le résultat se situe dans l'intervalle [5,0 cm; 6,0 cm], mais on ne sait rien d'autre. La probabilité pour que la valeur de *L* soit située dans l'intervalle compris entre 5,0 cm et 6,0 cm est égale à 1; elle est égale à zéro en dehors de cet intervalle.

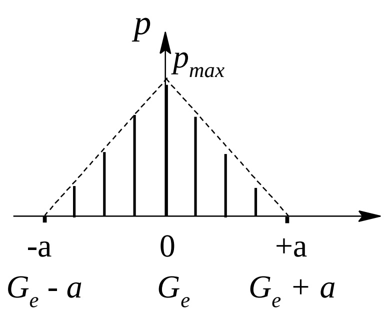
Dans l' ***« Activité*** $\sqrt{12}$ ***»*** vue en ***Première S***, on a divisé l'intervalle [5 , 6] cm en ***n*** parties égales (par exemple si ***n*** = 10, on a envisagé les valeurs 5,0 cm; 5,1 cm; 5,2 cm; 5,3 cm; 5,4 cm; 5,5 cm; 5,6 cm; 5,7 cm; 5,8 cm; 5,9 cm; 6,0 cm) et on a considéré que les valeurs possibles étaient ***équiprobables*** (donc probabilité $p = \frac{1}{n+1}$ car n intervalles ⇔ (n + 1) valeurs)

Schema : 8 intervalles ⇔ 9 valeurs

On dit que ***la loi de probabilité est rectangulaire*** (ou uniforme) d'après la représentation graphique ci-contre.



Cependant, il est légitime de considérer que la valeur juste au centre de l'intervalle a une probabilité plus grande que les valeurs aux extrémités. On peut alors envisager une ***loi de probabilité triangulaire*** dont la représentation graphique est ci-contre :



Travail :

On se propose de diviser l'intervalle [-a, + a] (ou [G_e - a, G_e + a]) en 2, 4, 8, 16 (les puissances de 2) parties égales et de calculer la moyenne et l'écart-type des valeurs possibles compte tenu de cette nouvelle loi de probabilité.

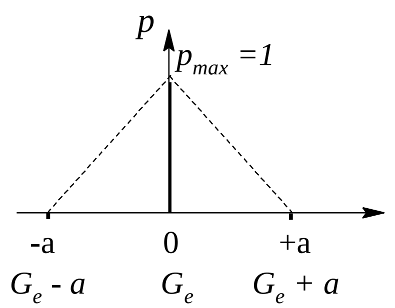
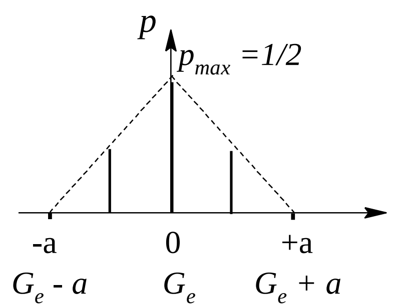
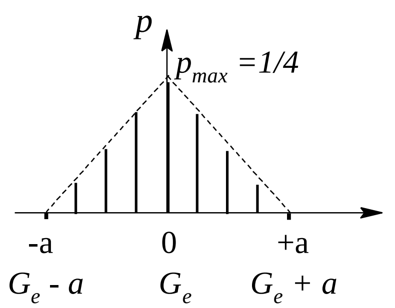
Analyse préliminaire

1) Soient les valeurs $\{G_0, G_1, G_2, ..G_i, ..G_n\}$ de G possible dans l'intervalle considéré auxquelles sont associées les probabilités $\{p_0, p_1, p_2, ..p_i, ..p_n\}$: quelle est la relation entre les p_i quelle que soit la loi de probabilité considérée ? Cette relation est-elle vérifiée dans la loi d'équiprobabilité envisagée plus haut ?
2) Dans la loi de probabilité triangulaire, déterminer les équations des droites permettant d'établir la relation de la probabilité en fonction de la valeur de l'intervalle considéré (*Chercher les 2 x 2 équations suivant que l'on considère en abscisse* $[-a, +a]$ *ou* $[G_e - a, G_e + a]$ *faisant intervenir* p_{max} *la probabilité de la valeur centrale)*

Recherche de *p* pour chaque valeur de l'intervalle dans le cas de la loi de probabilité rectangulaire

On observe tout d'abord que, par symétrie, il suffit de connaître les probabilités « d'un côté ». On va chercher les valeurs entre $[-a, 0]$ ou $[G_e - a, G_e]$.

3) Détermination de p_{max} en divisant l'intervalle $[-a, +a]$ *en* $n_i = 2^i$ *parties égales*

$n_1 = 2^1$	$n_2 = 2^2$	$n_3 = 2^3$
		

Montrer que la valeur de p_{max} pour une division en $n_i = 2^i$ parties égales est : $p_{max} = \frac{1}{2^{i-1}}$

4) Montrer que, pour les valeurs de l'intervalle $[-a, 0]$ (*ou* $[G_e - a, G_e]$)

   à chaque valeur $G_j = G_e - a + \frac{j}{2^{i-1}} a$ avec *j entier*, $[0, 2^{i-1}]$ correspond la probabilité $p_j = \frac{j}{(2^{i-1})^2} = \frac{j}{2^{2i-2}}$
5) En déduire que pour les valeurs de l'intervalle $]0, +a]$ (*ou* $]G_e, G_e + a]$)

   à chaque valeur $G_j = G_e - a + j \frac{a}{2^{i-1}}$ avec *j entier*, $[2^{i-1}, 2^i]$ correspond la probabilité $p_j = \frac{2^i - j}{(2^{i-1})^2}$

Si vous ne réussissez pas à démontrer les relations ci-dessus, faire les calculs qui suivent dans le tableur en considérant (sans donc les démontrer) les relations comme données.

Calculs avec Excel

Dans le cas de valeurs x_i pondérée par une probabilité pi, moyenne et écart-type se calcule suivant les formules :

$$\mu \text{ (ou } \overline{x}\text{)} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \quad \text{et} \quad s \text{ (ou } \sigma\text{)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \overline{x})^2}$$

1°) Evaluation de la moyenne et de l'écart-type

<u>Premier cas</u>: échantillonnage de 0,25 cm: (1 cm divisé par 2^2 =4)

Valeurs/cm	5,00	5,25	5,50	5,75	6,00
p (probabilité)	0	1/4 (=1/2^2)	1/2 (=2/2^2)	1/4	0

➢ Dans le logiciel Excel, faire calculer la valeur moyenne et l'écart-type de ces mesures.

Noter les résultats dans le tableau placé en fin de document.

<u>Deuxième cas :</u>: échantillonnage de 0,125 cm: (1 cm divisé par 2^3 =8)

Valeurs/cm	5,000	5,125	5,250	5,475	5,50	5,625	5,750	5,875	6,00
p (probabilité)	0	1/16 = $(1/2^4)$	1/8 = $(2/2^4)$	3/16 = $(3/2^4)$	1/4 = $(4/2^4)$	3/16 etc.	1/8	1/16	0

- Dans le logiciel Excel, faire calculer la valeur moyenne et l'écart-type de ces mesures.

Noter les résultats dans le tableau placé en fin de document.

<u>Troisième cas :</u>: échantillonnage de 0,0625 cm: (1 cm divisé par 2^4 =16)

Valeurs/cm	5,0000	5,0625	5,1250	5,1875	5,2500	5,3125	5,3750	5,4375	5,500
p (probabilité)	0	1/64 = $(1/2^6)$	1/32 = $(2/2^6)$	3/64 = $(3/2^6)$	1/16 = $(4/2^6)$	5/64 = $(5/2^6)$	3/32 = $(6/2^6)$	7/64 = $(7/2^6)$	1/8 = $(8/2^6)$
Valeurs/cm		5,5615	5,6250	5,6875	5,7500	5,8125	5,875	5,9375	6,000
p (probabilité)		7/64	3/32	5/64	1/16	3/64	1/32	1/64	0

- Dans le logiciel Excel, faire calculer la valeur moyenne et l'écart-type de ces mesures.

Noter les résultats dans le tableau placé en fin de document.

Continuer ainsi pour un échantillonnage de $(1/2^5)$ cm $(1/2^6)$ cm $(1/2^7)$ cm et $(1/2^8)$ cm
et compléter toutes les cellules du tableau.

Tableau de résultats :

Echantillonnage (cm)	$1/2^2$	$1/2^3$	$1/2^4$	$1/2^5$	$1/2^6$	$1/2^7$	$1/2^8$
μ : moyenne (cm)							
σ : ecart-type (cm)							
$\frac{\lvert \sigma - Val\_lim \rvert}{Val\_lim}$ (%)							

2°) ***Evaluation de la valeur limite de l'écart-type***

- Vers quelle valeur tend σ quand ech décroît ?
- Comparer la valeur de σ avec $\frac{1}{\sqrt{24}}$. (*Remplir la 3ème ligne du tableau ci-dessus*)
- Conclusion : quelle est estimation de l' incertitude-type ***u(L)*** sur une longueur ***L*** mesurée avec une règle graduée au cm en admettant une loi de probabilité triangulaire ?

Généralisation :

D'une manière générale, on pourra retenir que pour un instrument gradué :

Incertitude-type :

u(G) = $\frac{1}{\sqrt{12}}$ ***(la plus petite graduation) pour une loi de probabilité rectangulaire (équiprobabilité)***

u(G) = $\frac{1}{\sqrt{24}}$ ***(la plus petite graduation) pour une loi de probabilité triangulaire***