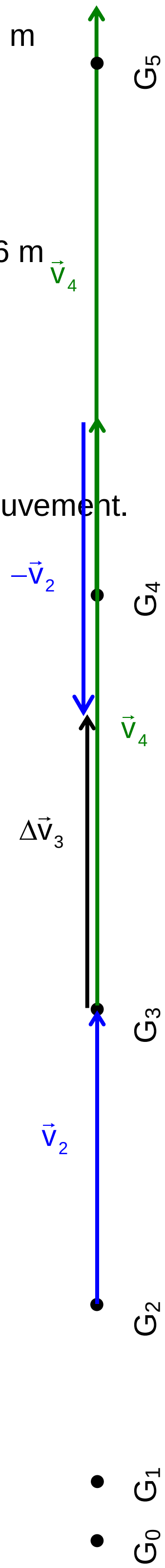
EXERCICE I. RECORD DE SAUT EN LONGUEUR À MOTO

Polynésie 09/2009 **Correction © http://labolycee.org**

1. La phase d'accélération du motard.



1.1. $\boxed{v_2 = \dfrac{G_1G_3}{t_3 - t_1} = \dfrac{G_1G_3}{2\tau}}$ le facteur d'échelle donne : 1 cm (document) ⇔ 2 m (réel)

avec G_1G_3 = 6,4 cm sur le document donc réellement : G_1G_3 = 6,4 × 2 / 1 = 12,8 m

$v_2 = \dfrac{12{,}8}{2 \times 0{,}800}$ = **8,0 m.s^{-1}**

$\boxed{v_4 = \dfrac{G_3G_5}{t_5 - t_3} = \dfrac{G_3G_5}{2\tau}}$

avec G_3G_5 = 12,8 cm sur le document donc réellement : G_3G_5 = 12,8 × 2 / 1 = 25,6 m

$v_4 = \dfrac{25{,}6}{2 \times 0{,}800}$ = **16,0 m.s^{-1}**

1.2. Voir ci-contre. Échelle des vitesses : 1 cm ⇔ 2 m.s^{-1} donc

$\vec{v}_2$ représenté par une flèche de 8,0 × 1/2 = 4,0 cm

$\vec{v}_4$ représenté par une flèche de 16,0 × 1/2 = 8,0 cm

Les vecteurs vitesses sont tangents à la trajectoire et orientés dans le sens du mouvement.

1.3. Voir ci-contre. Construction du vecteur $\Delta\vec{v}_3 = \vec{v}_4 - \vec{v}_2$ en G_3.

1.4. Expression du vecteur accélération $\vec{a}_3$ au point G_3 : $\vec{a}_3 = \dfrac{d\vec{v}_3}{dt} \approx \dfrac{\Delta\vec{v}_3}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v}_4 - \vec{v}_2}{2\tau}$

$a_3 = \dfrac{\Delta v_3}{2\tau}$. Or le vecteur $\Delta\vec{v}_3$ mesure 4,0 cm donc avec l'échelle des vitesses

1 cm ⇔ 2 m.s^{-1} ; Δv_3 = 4,0×2 / 1 = 8,0 m.s^{-1}

Finalement : $a_3 = \dfrac{8{,}0}{2 \times 0{,}800}$ = 5,0 m.s^{-2}.

1.5.1. Le graphe de la figure 2 est une droite passant par l'origine, donc la vitesse est proportionnelle au temps : v = k . t.

Par définition l'accélération a est a = $\dfrac{dv}{dt}$; ici a = $\dfrac{d(k.t)}{dt}$ = k = Cte.

L'accélération de la moto est constante.

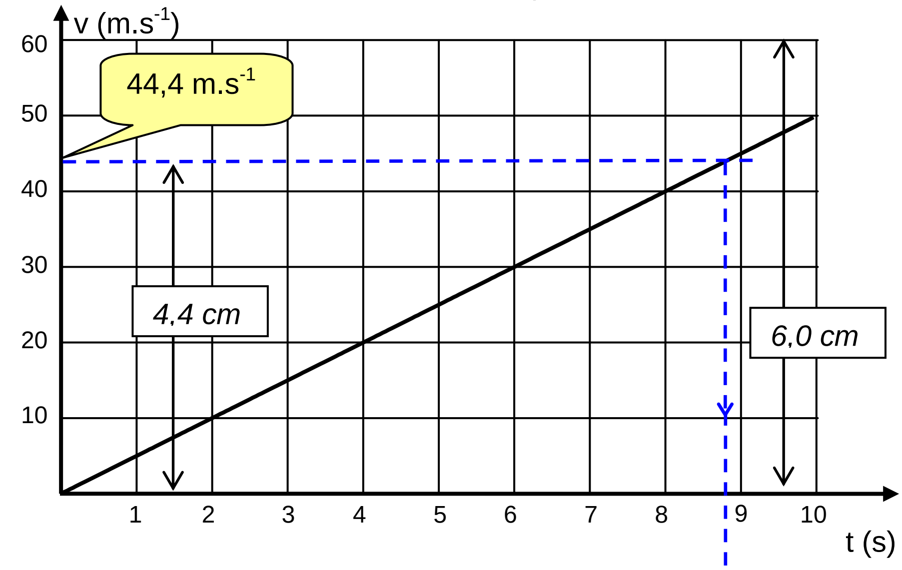
1.5.2. On détermine le coefficient directeur de la droite :

entre les points (0 ; 0) et (50 ; 10) : $a = \dfrac{50 - 0}{10 - 0}$ = **5,0 m.s^{-2}.**

On retrouve bien la valeur obtenue graphiquement en 1.4.

1.5.3. *distance parcourue par le motard lorsque celui-ci a atteint une vitesse de 160 km.h^{-1} :*
On a 160 km.h^{-1} = (160/3,6) = 44,4 m.s^{-1}. On trace la droite horizontale d'équation v = 44,4 sur la figure 2. Le point d'intersection avec le graphe v(t) donne en abscisse, le temps de parcours. On reporte ce temps de parcours sur la figure 3 : le point d'intersection avec le graphe d(t) nous donne la distance parcourue.
On mesure ici : d = 195 m, cette détermination graphique étant approximative, on ne conserve que deux chiffres significatifs, **d = 2,0×10^2 m**.

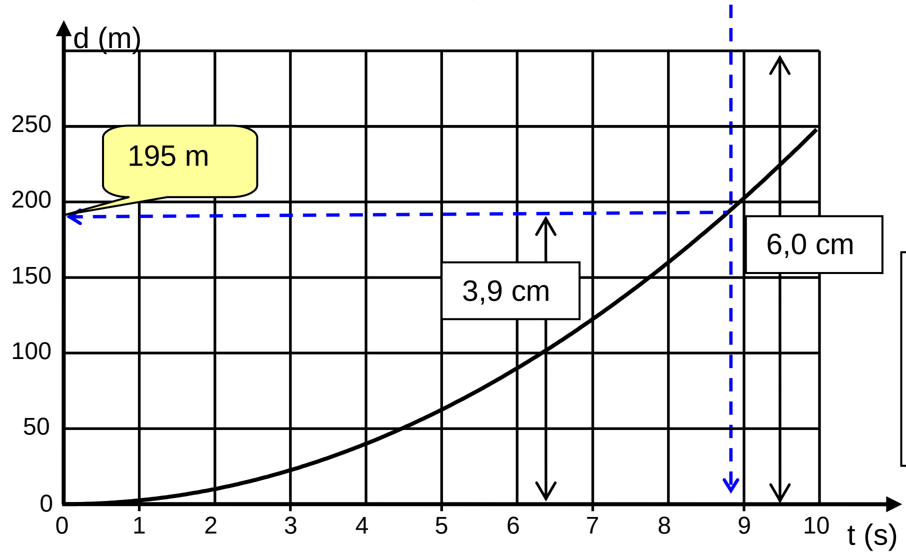
Figure 2 : Valeur v de la vitesse du système en fonction du temps.



60 m.s^{-1} → 6,0 cm
44,4 m.s^{-1} → x cm

x = (44,4×6,0)/60
x = 4,4 cm

Figure 3 : Distance d parcourue par le système en fonction du temps



300 m → 6,0 cm
d m → 3,9 cm

d = (3,9×300)/6,0
d = 195 m

2. La montée du tremplin.

2.1. Énergie mécanique : $\boxed{E_M = E_C + E_{PP} = ½.m.v^2 + m.g.z}$
(avec axe Oz vertical orienté vers le haut et l'origine des énergies potentielles prise en z = 0).

2.2. Variation d'énergie potentielle de pesanteur entre B et C :

$$\Delta E_{PP} = E_{PP}(C) - E_{PP}(B) = m.g.z_C - 0 = m.g.OC$$

Or $\sin\alpha = OC / BC \Leftrightarrow OC = BC . \sin\alpha$

Donc $\boxed{\Delta E_{PP} = m.g.BC.\sin\alpha.}$ AN : $\Delta E_{PP} = 180 \times 9,81 \times 7,86 \times \sin(27) = 6,3 \times 10^3$ J = **6,3 kJ**.

2.3. Entre B et C le motard maintient une vitesse constante donc $\Delta E_C = E_C(C) - E_C(B) = 0$.
Comme $E_M = E_C + E_{PP}$ alors $\Delta E_M = \Delta E_C + \Delta E_{PP} = \Delta E_{PP} > 0$.
Donc $E_M(C) > E_M(B)$: ainsi l'énergie mécanique du système augmente lorsqu'il passe de B à C.

3. Le saut.

3.1. Le mouvement du système { motard + moto }, de masse m, est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le système n'étant soumis qu'à son poids, la deuxième loi de Newton donne : $\vec{P} = m.\vec{a}$

Or $\vec{P} = m.\vec{g}$ donc $m.\vec{g} = m.\vec{a}$ soit $\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$

En projection dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$ il vient : $\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$

Comme $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ alors $\vec{a}\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_z = \dfrac{dv_y}{dt} = -g \end{cases}$ il vient $\vec{v}\begin{cases} v_x = Cte1 \\ v_z = -g.t + Cte2 \end{cases}$

Or $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ soit $\begin{cases} v_x(0) = v_0.\cos\alpha = Cte1 \\ v_z(0) = v_0.\sin\alpha = 0 + Cte2 \end{cases}$ il vient finalement : $\boxed{\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0.\cos\alpha \\ v_z = -g.t + v_0.\sin\alpha \end{cases}}$

Et $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ alors $\vec{v}\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = v_0.\cos\alpha \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = -g.t + v_0.\sin\alpha \end{cases}$ il vient $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = (v_0.\cos\alpha.)t + Cte'1 \\ z = -\dfrac{1}{2}g.t^2 + (v_0.\sin\alpha).t + Cte'2 \end{cases}$

Or $\overrightarrow{OG}(0) = h.\vec{k}$ soit $\begin{cases} x(0) = 0 = Cte'1 \\ z(0) = h = Cte'2 \end{cases}$ il vient finalement : $\boxed{\overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = (v_0.\cos\alpha).t \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}g.t^2 + (v_0.\sin\alpha)t + h \end{cases}}$

3.2. On isole le temps « t » de l'équation $x(t) = (v_0.\cos\alpha).t$ que l'on reporte dans z(t) :

$$t = \frac{x}{v_0.\cos\alpha} \Rightarrow z(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0.\cos\alpha}\right)^2 + (v_0.\sin\alpha).\left(\frac{x}{v_0.\cos\alpha}\right) + h$$

finalement : $\boxed{z(x) = -\dfrac{g}{2.v_0^2.\cos^2\alpha}.x^2 + (\tan\alpha).x + h}$

3.3. « L'atterrissage » se fait sur le tremplin si $z(x_D) \geq h$. La distance maximale du point D correspondant au cas de l'égalité : $z(x_D) = h$

Soit : $-\dfrac{g}{2.v_0^2.\cos^2\alpha}.x_D^2 + (\tan\alpha).x_D + h = h \Leftrightarrow x_D.\left(\tan\alpha - \dfrac{g.x_D}{2.v_0^2.\cos^2\alpha}\right) = 0$

En écartant la solution $x_D = 0$, il vient : $\left(\tan\alpha - \dfrac{g.x_D}{2.v_0^2.\cos^2\alpha}\right) = 0$

soit $x_D = \dfrac{2.v_0^2.\tan\alpha.\cos^2\alpha}{g}$; $x_D = \dfrac{2.v_0^2.\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\cos^2\alpha}{g}$; $x_D = \dfrac{2.v_0^2.\sin\alpha.\cos\alpha}{g}$

« Maths » : sin(a+b) = sin a . cos b + cos a . sin b, donc 2 sin α . cos α = sin 2α

Finalement : $\boxed{x_D = \dfrac{v_0^2.\sin(2\alpha)}{g}}$

3.4. $x_D = \dfrac{(160/3,6)^2 \times \sin(2\times 27)}{9,81} = 162,9$ m = $\mathbf{1,6\times10^2}$ **m**

Cette valeur est supérieure à 107 m. Cette différence est due aux forces de frottements qui n'ont pas été prises en compte lors de l'étude du système ; elles diminuent la portée du saut.