

Fiche Méthode sur les calculs vectoriels

Soit une relation sur des grandeurs vectorielles (forces, vitesses, etc.).

Généralement dans les exercices, on cherche à trouver des relations entre les normes des vecteurs : il faut donc passer de la relation vectorielle à la relation sur les normes.

Remarque préalable sur les écritures : soit une grandeur vectorielle $\vec{G}$, on écrira :

$\vec{G}$ pour la grandeur vectorielle
 G_x, G_y, G_z pour les projections du vecteur sur les axes (grandeurs qui peuvent être positives ou négatives)
 G pour la norme (ou module) du vecteur (grandeur toujours positive)

Rem ; on évitera pour la norme l'écriture du mathématicien : $||\vec{G}||$

Soit par exemple la situation ci-contre :

On cherche à déterminer la force résultante $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$

- 1) il faut vérifier que les grandeurs dans la relation sont toutes de même nature : pas de relation, par exemple, dans laquelle on additionne des vecteurs vitesse et des vecteurs force

Pour trouver la norme de F , plusieurs méthodes sont possibles suivant ce qui est demandé dans l'exercice :

- 2) **méthode graphique** : on suppose que les différents vecteurs ont été représentés

avec une certaine échelle : il suffit d'additionner vectoriellement $\vec{F}_2 + \vec{F}_3$
 (règle du parallélogramme) : la suite est alors évidente puisqu' alors les vecteurs à considérer sont colinéaires

- 3) **méthode particulière** : cette méthode tient compte des informations particulières sur les différents vecteurs à considérer : par exemple, lorsque des vecteurs sont colinéaires ou des vecteurs sont perpendiculaires.

Si des vecteurs sont colinéaires, les « additions » sur les normes des vecteurs sont évidentes : il suffit juste de tenir compte du sens des différents vecteurs.

Si des vecteurs sont perpendiculaires, il suffit d'appliquer Pythagore : ainsi dans l'exemple ci-dessus pour $\vec{F}_{2-3} = \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, il est évident que $F_{2-3} = F_2 \sqrt{2}$

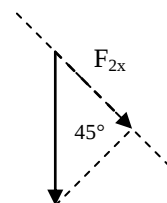
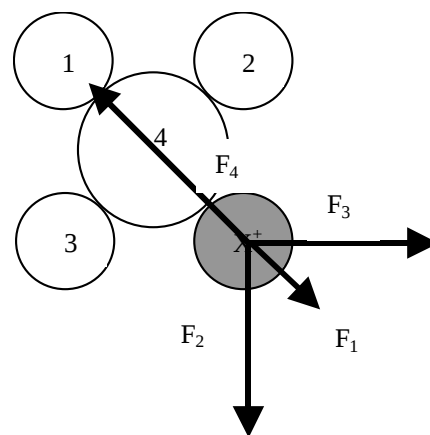
- 4) **méthode générale** : (pas de propriété géométrique particulière entre les vecteurs)

On choisit un (ou plusieurs) axe(s) judicieusement (par exemple, de telle façon que les projections de certains vecteurs soient nulles ou encore que l'axe soit de même direction que certains vecteurs)

Ainsi dans l'exemple ci-dessus, il est judicieux de prendre un axe ($x'x$ par exemple) parallèle à $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_4$ et l'autre axe ($y'y'$) perpendiculaire.

Pourquoi est-ce plus judicieux que de prendre les axes $x'x$ et $y'y'$, respectivement horizontal et vertical ?

Parce que sur l'axe $y'y'$, $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_4$ ont des projections nulles ! De plus les projections de $\vec{F}_2 + \vec{F}_3$ étant opposées, on voit de suite que $F_y = 0$



Méthode à respecter rigoureusement

- (1) Relation vectorielle : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$
- (2) En projection sur un axe (ici $x'x$) : $F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}$

REMARQUE : Dans le passage de la relation vectorielle à la relation algébrique : **il n'y a pas de modification de signe** par rapport aux signes de la relation vectorielle

- (3) Passage aux normes : (avec $x'x$ dirigé vers le bas) $F_{1x} = F_1$ $F_{4x} = -F_4$
 et $F_{2x} = F_{3x} = F_2 \cos(45^\circ) = F_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$ (il faut donc connaître les relations avec $\cos$, $\sin$ et $\tan$)

REMARQUE : C'est dans cette étape qu'il convient de prendre garde aux problèmes de signes et d'affecter à la norme en cohérence avec l'orientation de l'axe choisi

A propos de quelques relations vectorielles :

1) La deuxième loi de Newton

En Terminale S, on ne s'intéresse qu'à la mécanique du point. Ainsi si on étudie un solide, on se limite à l'étude de son centre d'inertie I où serait concentrée toute la masse du solide. On suppose par ailleurs (sauf cas contraire explicite – fusée, etc.-) que la masse du système est constante.

La deuxième loi de Newton (qui est à vrai dire un **principe** – le principe fondamental de la dynamique-) s'écrit de façon générale :

$$\Sigma \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ avec } \vec{p} = m \vec{v}_I, \text{ quantité de mouvement du système}$$

Dans le cas de masse constante, ce principe devient le théorème du centre d'inertie $\Sigma \vec{f} = m \vec{a}_I$

Mais il faut s'assurer que le référentiel d'étude est galiléen
... si non, il faut alors prendre en compte les forces d'inertie*

*Voir annexe sur les changements de référentiel, accélération d'inertie, etc.

2) Le cas particulier d'une relation d'équilibre

Elle s'écrit habituellement $\Sigma \vec{f}_{\text{ext}} = \vec{0}$ (toujours en considérant que le référentiel est galiléen)

Mais attention ce n'est qu'une condition nécessaire...

- Ce n'est en effet qu'un cas particulier de la 2^{ème} loi de Newton $\Rightarrow \vec{a}_I = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_I = \text{Cste}$ donc de façon générale si $\Sigma \vec{f}_{\text{ext}} = \vec{0}$ le mouvement du centre d'inertie est **rectiligne uniforme** (principe d'inertie ! ... qui est donc un cas particulier du principe fondamental) $\vec{v}_I = \vec{0}$ n'étant qu'un cas particulier
- Si le système étudié est effectivement un point matériel, la relation est suffisante (*hors mis remarque précédente*) mais si le système est un solide, il faut ajouter la relation relative au moment total de toutes les forces $\Sigma \vec{M} = \vec{0}$

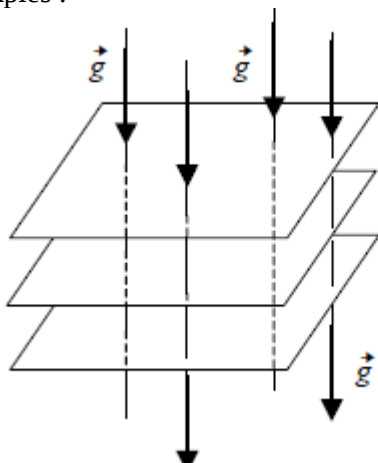
Cette relation implique :

- Dans le cas de deux forces : que les deux forces aient même droite support
- Dans le cas de trois forces : que les trois forces aient des directions concourantes

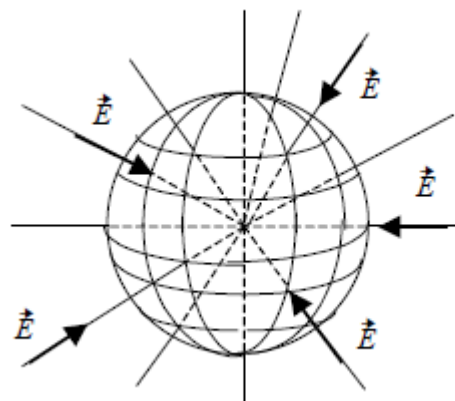
3) Cas de champ de vecteurs (poids, gravitation, champ électrique, etc.)

Le champ est décrit par la connaissance du vecteur en chaque point du champ ce qui signifie la connaissance de 3 données (les trois composantes du vecteur). Quand le champ dérive d'un potentiel, le champ est également décrit par le potentiel en chaque point du champ (à une constante près !) : l'intérêt est que la grandeur potentielle est unique (à la constante près !... et c'est une grandeur scalaire)

Exemples :



Champ de pesanteur : $\vec{g} = -g \vec{k}$
Potentiel : $V = g \cdot z + \text{Cste}$



Champ électrique(newtonien) $\vec{E} = -K/r^2 \vec{e}_r$
Potentiel : $V = K/r$