Vecteurs : Produit scalaire et produit vectoriel

Voir : http://www.uel.education.fr/consultation/reference/physique/outils_nancy/index.htm

I Produit scalaire (*de deux vecteurs !*)

Définition

- Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, noté $\vec{U}\cdot\vec{V}$, est un **scalaire** égal au produit des normes des deux vecteurs par le cosinus de leur angle $\theta = (\vec{U},\vec{V})$.

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = \|\vec{U}\|\,\|\vec{V}\|\cos\theta$$

Le produit scalaire est donc :
positif pour θ aigu, négatif pour θ obtus

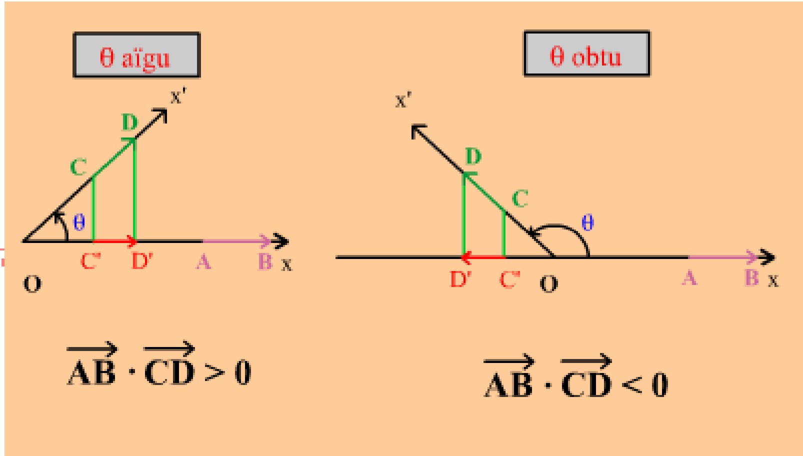
- **Forme géométrique**

Cas de deux vecteurs portés par deux axes.

- Par définition du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{CD}\|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \|\overrightarrow{AB}\|\times\overline{C'D'}$$

car $\overline{C'D'} = \mathrm{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{CD}\|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$



> ***Le produit scalaire de deux vecteurs est égal***
> ***au produit du module de l'un par la mesure algébrique de la projection de l'autre sur lui.***

- **Forme analytique**

En posant U_x , U_y , U_z et V_x , V_y , V_z les composantes respectives de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, (avec : $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$ $\quad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$) le produit scalaire de ces deux vecteurs est le **scalaire** défini par la relation :

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = (U_x\vec{i} + U_y\vec{j} + U_z\vec{k})\cdot(V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}) \qquad \vec{U}.\vec{V} = U_xV_x + U_yV_y + U_zV_z$$

Disposition pratique (calcul matriciel) : $(U_x \;\; U_y \;\; U_z)\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = U_x.V_x + U_y.V_y + U_z.V_z$

Propriétés Commutativité : $\vec{U}\cdot\vec{V} = \vec{V}\cdot\vec{U}$ Bilinéarité : $\begin{cases}(\vec{U}+\vec{V})\vec{W} = \vec{U}\cdot\vec{W} + \vec{V}\cdot\vec{W} \\ (\alpha\vec{U})\cdot(\beta\vec{V}) = (\alpha\beta)(\vec{U}\cdot\vec{V}) \quad (\alpha\in\mathbf{R},\beta\in\mathbf{R})\end{cases}$ ***Relations*** $\vec{U}\cdot\vec{U} = \vec{U}^2 > 0$ si $\vec{U}\neq 0$ $\left(\vec{U}^2 = \|\vec{U}\|^2\right)$ $\vec{U}\cdot\vec{V} = 0$ si $\vec{U} = \vec{0}$ ou $\vec{V} = \vec{0}$ ou $\vec{U}\perp\vec{V}$ $(\vec{U}\pm\vec{V})^2 = (\vec{U})^2 \pm 2(\vec{U}\cdot\vec{V}) + (\vec{V})^2$ $(\vec{U}+\vec{V})\cdot(\vec{U}-\vec{V}) = (\vec{U})^2 - (\vec{V})^2$ $(\vec{U}\cdot\vec{V})^2 \leq (\vec{U})^2(\vec{V})^2 \Leftrightarrow \lvert\vec{U}\cdot\vec{V}\rvert \leq \|\vec{U}\|\|\vec{V}\|$ (inégalité de Schwartz)	***Norme*** $\|\vec{U}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{U} = \vec{0}$ $\|\alpha\vec{U}\| = \alpha\|\vec{U}\|$ (α scalaire) $\|\vec{U}+\vec{V}\| \leq \|\vec{U}\| + \|\vec{V}\|$ (inégalité triangulaire)

Applications

En géométrie (dans un repère orthonormé**)**

- Module d'un vecteur $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$

  On a : $\vec{V}\cdot\vec{V} = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \Rightarrow \|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$
- Distance entre deux points M(x,y,z) et N(x',y',z')

  $d(M, N) = MN = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$
- Détermination du cosinus de l'angle entre deux vecteurs $\vec{U}(U_x, U_y, U_z)$ et $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$

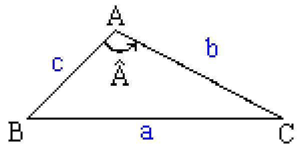
  Par application du produit scalaire :

  $$\cos(\vec{U}, \vec{V}) = \frac{\vec{U}\cdot\vec{V}}{\|\vec{U}\|\|\vec{V}\|} = \frac{U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z}{\sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$$
- Relation métrique dans un triangle quelconque

  Nous avons $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ d'où

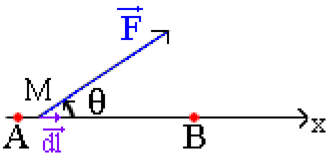
  $$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$
  $$= \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$$
  $$= \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

  donc $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\hat{A}$



En Physique

- Travail élémentaire dW d'une force $\vec{F}$ constante dont le point d'application se déplace de $\vec{dl}$: $dW = \vec{F}\cdot\vec{dl}$



$dW = \vec{F}\cdot\vec{dl} = F\,dl\cos\theta$

$\left(W = \int_{AB} dW = F \times AB \times \cos\theta\right)$

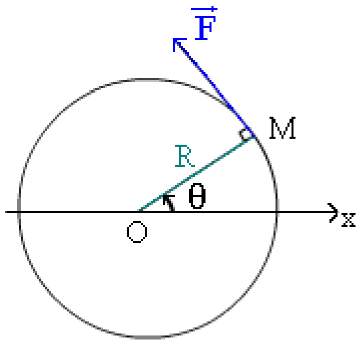
Application :

le travail d'une force **<u>constante</u>** $W = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$

Cas particulier du poids :

(sur une hauteur *h* où $\vec{g}$ = Cste)

$W = \vec{P}.\overrightarrow{AB} = m.g_z\,(z_B - z_A) = \pm\, m\, g\, .h$



$dW = \vec{F}\cdot\vec{dl} = FR\,d\theta$

$\left(W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dW = FR(\theta_2 - \theta_1)\right)$

- Flux à travers une surface : $d\phi = \vec{V}(M)\cdot\vec{dS}$

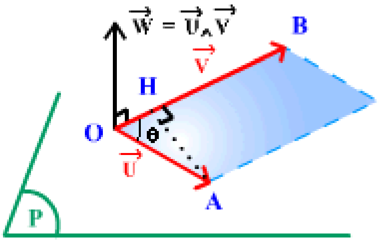
  L'intensité d'un courant à travers une section (S) d'un conducteur est le flux du vecteur densité de courant $\vec{j}$ à travers (S). Les charges mobiles, de densité volumique ρ, se déplacent à la vitesse $\vec{v}$ à travers une surface dS. Pendant le temps dt, la charge traversée sera : $dq = \rho\vec{v}dt\cdot\vec{dS}$

  En posant $\vec{j} = \rho\vec{v}$ le vecteur densité de courant, nous avons $i = \frac{dq}{dt} = \vec{j}\cdot\vec{dS}$ $\left(I = \frac{dQ}{dt} = \iint_S \vec{j}\cdot\vec{dS}\right)$

II Produit vectoriel (*de deux vecteurs !*)

Définition

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, est un **vecteur** $\vec{W}$, noté $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ de :



- direction : $\vec{W} \perp \vec{U}$ et $\vec{W} \perp \vec{V}$
- sens : trièdre $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ direct
- norme : $\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \left|\sin(\vec{U}, \vec{V})\right|$

$\|\vec{W}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur les représentants $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

En effet, $AH = OA \sin\theta = \|\vec{U}\| \left|\sin(\vec{U}, \vec{V})\right|$ et l'aire du parallélogramme devient : $OB \times AH = \|\vec{V}\| \|\vec{U}\| \left|\sin(\vec{U}, \vec{V})\right|$.

- **Forme analytique**

En posant U_x, U_y, U_z et V_x, V_y, V_z les composantes respectives de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, (en sachant que : $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ et $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$)
le produit vectoriel de ces deux vecteurs est le **vecteur** défini par la relation :

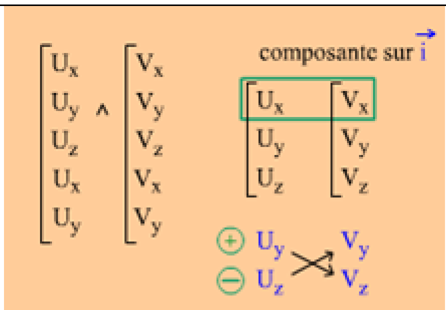
$$\boxed{\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = (U_y V_z - U_z V_y)\vec{i} + (U_z V_x - U_x V_z)\vec{j} + (U_x V_y - U_y V_x)\vec{k}}$$

Disposition pratique :

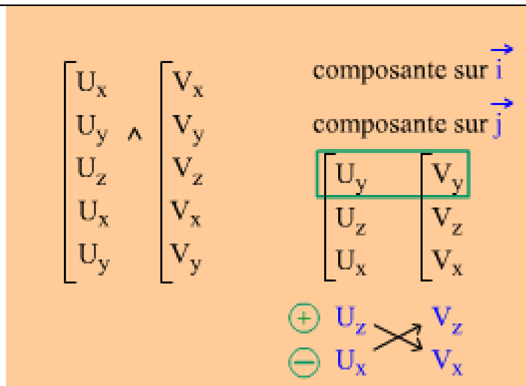
$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_y V_z - U_z V_y \\ U_z V_x - U_x V_z \\ U_x V_y - U_y V_x \end{bmatrix}$$

Mode de calcul à partir de coordonnées :

<table>
<tr>
<td>$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}$

Réécrire les deux =>
premières
coordonnées
sous les deux triplets</td>
<td>

Pour la coordonnées sur x'x, ,
Prendre les coordonnées « en dessous »
Le produit :
- « en descendant » affecté de +
- « en montant » affecté de –

d'où $(\vec{U} \wedge \vec{V})_x = U_y.V_z - U_z . V_y$</td>
<td>

Même calcul pour la coordonnée sur y'y :
soit $(\vec{U} \wedge \vec{V})_y = U_z.V_x - U_x . V_z$
… puis la coordonnée sur z'y :
Soit $(\vec{U} \wedge \vec{V})_z = U_x.V_y - U_y . V_x$</td>
</tr>
</table>

Propriétés

Non Commutativité : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$

Bilinéarité : $\begin{cases} (\vec{U}+\vec{V}) \wedge \vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{W} + \vec{V} \wedge \vec{W} \\ (\alpha\vec{V}) \wedge (\beta\vec{V}) = (\alpha\beta)(\vec{U} \wedge \vec{V}) \; (\alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}) \end{cases}$

Relation

$\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0}$ si $\vec{U} = \vec{0}$ ou $\vec{V} = \vec{0}$ ou $\vec{U} \,//\, \vec{V}$

Applications

En géométrie (dans un repère orthonormé**)**

- Mesure de l'aire d'un parallélogramme ABCD ou d'un triangle ABC

  Aire du parallélogramme (ABCD) = $\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \right\|$

  Aire du triangle (ABC) = $\frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \right\|$
- Equation cartésienne d'une droite (D) passant par deux points A et B d'un plan xOy.

  Si un point M ∈ (D) alors $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

En Physique

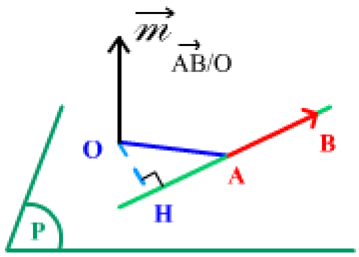
- Moment d'un vecteur par rapport à un point

  Moment de vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au point O est le vecteur :

  $\overrightarrow{m}_{AB/0} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$

  Module : $\left\| \overrightarrow{m}_{AB/0} \right\| = \left\| \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} \right\| = \left\| \overrightarrow{OA} \right\| \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \sin\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}\right)$

  avec $OH = \left\| \overrightarrow{OA} \right\| \sin\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}\right)$



- Moment cinétique d'une masse ponctuelle en mouvement par rapport à un point O :

$$\vec{\sigma}_{M/O} = \overrightarrow{OM} \wedge m.\vec{v}$$

- Accélération de Coriolis dans un référentiel non galiléen :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}/\mathcal{R}0} = 2\,(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}0} \wedge \vec{v}_{MR/\mathcal{R}})$$

- Force subie par une charge ponctuelle q se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$:

$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ (**Force de Lorentz**)

III Produit mixte (*de trois vecteurs !*)

Définition

On appelle **produit mixte** entre trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$, le scalaire défini par :

$$\boxed{\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)=\left(\vec{U}\wedge\vec{V}\right)\cdot\vec{W}}$$

- **Forme géométrique**

Posons $\vec{P}=\vec{U}\wedge\vec{V}$

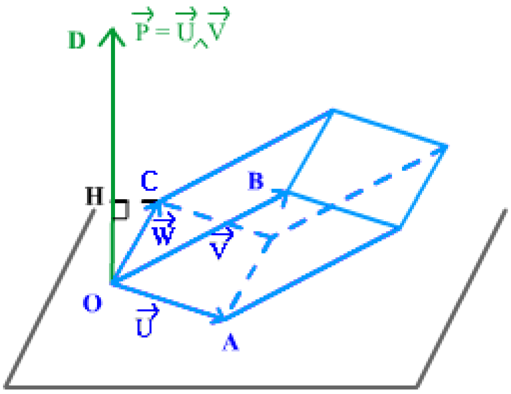
$\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)=\vec{P}\cdot\vec{W}=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}$

Si H désigne la projection orthogonale de C sur OD alors :

$$\left|\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)\right|=\left|\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}\right|=\left\|\overrightarrow{OD}\right\|\left\|\overrightarrow{OC}\right\|\left|\cos\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC}\right)\right|$$

$$=\left\|\overrightarrow{OD}\right\|\left\|\overrightarrow{OH}\right\|$$

avec $\left\|\overrightarrow{OD}\right\|=\left\|\vec{U}\wedge\vec{V}\right\|$ aire du parallélogramme construit sur $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ et donc :



$\left|\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)\right|$: Volume du parallélépipède d'arêtes OA, OB et OC

- **Forme analytique**

Dans la base orthonormée directe $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ le produit mixte de trois vecteurs :

$\vec{U}=U_x\vec{i}+U_y\vec{j}+U_z\vec{k}$

$\vec{V}=V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}$

$\vec{W}=W_x\vec{i}+W_y\vec{j}+W_z\vec{k}$

s'exprime par le scalaire :

$$\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)=\left(\vec{U}\wedge\vec{V}\right)\cdot\vec{W}$$

$$=\left(U_yV_z-U_zV_y\right)W_x+\left(U_zV_x-U_xV_z\right)W_y+\left(U_xV_y-U_yV_x\right)W_z$$

Il est possible de retrouver ce résultat par le développement d'un déterminant d'ordre 3, dont les colonnes contiennent respectivement les composantes des vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$.

Propriétés

Non commutativité : $\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)=-\left(\vec{W},\vec{V},\vec{U}\right)$

Multilinéarité par rapport à chacun des vecteurs : cas du vecteur $\vec{U}$

$$\begin{cases}\left(\vec{U_1}+\vec{U_2},\vec{V},\vec{W}\right)=\left(\vec{U_1},\vec{V},\vec{W}\right)+\left(\vec{U_2},\vec{V},\vec{W}\right)\\ \left(\alpha\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)=\alpha\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)\end{cases}$$

Le produit mixte est **invariant** :

par **permutation circulaire des trois vecteurs** : $\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)=\left(\vec{V},\vec{W},\vec{U}\right)=\left(\vec{W},\vec{U},\vec{V}\right)$

par **échange des symboles ^ et** $\cdot$: $\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)=\left(\vec{U}\wedge\vec{V}\right)\cdot\vec{W}=\vec{U}\cdot\left(\vec{V}\wedge\vec{W}\right)$

Les vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ étant non nuls, le produit mixte $\left(\vec{U},\vec{U},\vec{W}\right)$ est nul, si et seulement si, les vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont **coplanaires**.

Cas particulier :

Si le produit mixte contient deux vecteurs identiques alors celui-ci est nul : $\left(\vec{U}, \vec{U}, \vec{W}\right) = 0$.

Exemple d'application en Physique :

La relation de Lorentz exprime la force magnétique $\vec{F}$ *exercée sur une particule de charge électrique q, animée d'une vitesse* $\vec{v}$ *dans un champ magnétique* $\vec{B}$ *:* $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

La force de Lorentz a toujours une puissance nulle car la force $\vec{F}$ *est constamment perpendiculaire au vecteur vitesse* $\vec{v}$ *de la particule :* $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \left(q\vec{v} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v} = q\left(\vec{v}, \vec{B}, \vec{v}\right) = 0$

Dans une base orthonormée directe $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, nous avons :

$\left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right) \cdot \vec{k} = \left(\vec{j} \wedge \vec{k}\right) \cdot \vec{i} = \left(\vec{k} \wedge \vec{i}\right) \cdot \vec{j} = 1$

$\left(\vec{j} \wedge \vec{i}\right) \cdot \vec{k} = \left(\vec{k} \wedge \vec{j}\right) \cdot \vec{i} = \left(\vec{i} \wedge \vec{k}\right) \cdot \vec{j} = -1$

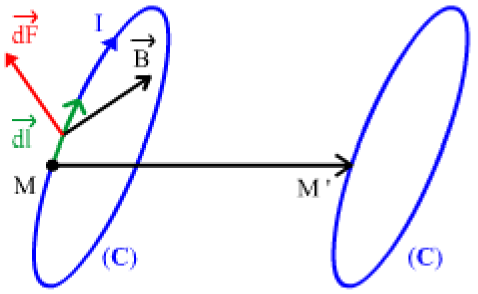
Applications

En géométrie

- Détermination du volume d'un parallélépipède connaissant les arêtes $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$:
  $V = \left|\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)\right|$
- Equation cartésienne d'un plan (P) passant par trois points A, B et C.
  Si M ∈ (P) alors : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}\right) = 0$

En Physique

- Travail des forces magnétiques :
  Un élément $\overrightarrow{dl}$ d'un circuit (C) parcouru par un courant I, placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ subit la force élémentaire (force de Laplace) : $\overrightarrow{dF} = I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$



- Pour un déplacement $\overrightarrow{MM'}$ du circuit, le travail des forces magnétiques s'écrit :

$$dW = \overrightarrow{dF} \cdot \overrightarrow{MM'}$$
$$dW = \left(I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}\right) \cdot \overrightarrow{MM'}$$
$$dW = I\left(\overrightarrow{dl}, \vec{B}, \overrightarrow{MM'}\right)$$

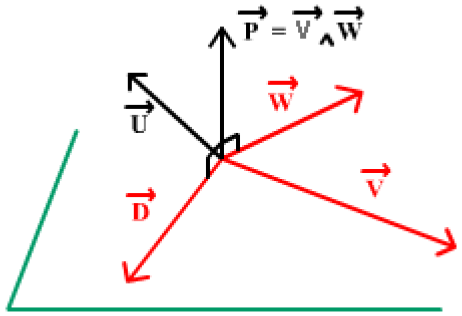
IV Double produit vectoriel (*de trois vecteurs !*)

Définition

On appelle **double produit vectoriel** entre trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ le vecteur $\vec{D}$ ou $\vec{D}'$ défini par :

$$\vec{D} = \vec{U} \wedge \left(\vec{V} \wedge \vec{W}\right) = \left(\vec{U} \cdot \vec{W}\right)\vec{V} - \left(\vec{U} \cdot \vec{V}\right)\vec{W}$$

ou $\vec{D}' = \left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right) \wedge \vec{W} = \left(\vec{U} \cdot \vec{W}\right)\vec{V} - \left(\vec{V} \cdot \vec{W}\right)\vec{U}$



Les vecteurs en rouge sont dans le même plan

Le produit vectoriel $\vec{P} = \vec{V} \wedge \vec{W}$ est représenté par un vecteur perpendiculaire au plan défini par $\vec{V}$ et $\vec{W}$. Le vecteur $\vec{D} = \vec{U} \wedge \vec{P}$ perpendiculaire à $\vec{P}$ se trouve dans le plan des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$. Le vecteur $\vec{D}$ est donc une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$:

$\vec{D} = \alpha\vec{V} + \beta\vec{W}$ avec $\alpha = \vec{U} \cdot \vec{W}$ et $\beta = -\vec{U} \cdot \vec{V}$

Dans le cas de la base orthonormée directe $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ nous avons :

$$\left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right) \wedge \vec{k} = \left(\vec{k} \wedge \vec{i}\right) \wedge \vec{j} = \left(\vec{j} \wedge \vec{k}\right) \wedge \vec{i} = \vec{0}$$

$$\left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right) \wedge \vec{i} = \vec{j}\ ;\ \left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right) \wedge \vec{j} = -\vec{i} \quad \text{etc...}$$

Propriétés

Non associativité : $\vec{U} \wedge \left(\vec{V} \wedge \vec{W}\right) \neq \left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right) \wedge \vec{W}$ (en général)

Le vecteur $\vec{D} = \vec{U} \wedge \left(\vec{V} \wedge \vec{W}\right)$ se trouve dans le plan défini par $\vec{V}$ et $\vec{W}$

alors que $\vec{D}' = \left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right) \wedge \vec{W}$ se situe dans le plan défini par $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

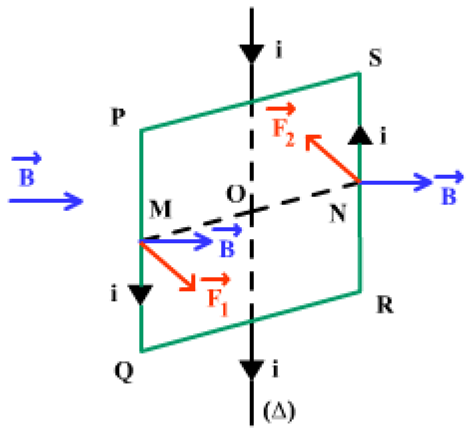
Application en Physique

Moment d'une force (résultante d'un produit vectoriel – exemple : force de Laplace-) par rapport à un point

Un cadre rectangulaire mobile, autour de l'axe (Δ) placé dans un champ magnétique radial $\vec{B}$, est parcouru par un courant d'intensité i.

Les seules forces agissantes dans la rotation du cadre sont :

$\vec{F_1} = i\ \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{B}$ et $\vec{F_2} = i\ \overrightarrow{RS} \wedge \vec{B}$



Les moments des forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ par rapport à O s'exprimeront à partir d'un double produit vectoriel :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F_1}/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F_1} = \overrightarrow{OM} \wedge \left(i\ \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{B}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F_2}/O} = \overrightarrow{ON} \wedge \vec{F_2} = \overrightarrow{ON} \wedge \left(i\ \overrightarrow{RS} \wedge \vec{B}\right)$$

comme $\overrightarrow{RS} = -\overrightarrow{PQ}$ => $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\left(\vec{F_1}+\vec{F_2}\right)/O} = i\ \overrightarrow{NM} \wedge \left(\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{B}\right)$