

Concours général des lycées – Composition de Sciences Physiques – session de 2005

Solution proposée par Dominique OBERT, professeur de MP* au lycée Victor Hugo de Besançon

PRINCIPES ET APPLICATIONS DES MESURES GRAVIMÉTRIQUES

Partie A : Etude des anomalies gravimétriques, applications à l'étude du sous-sol.

1. Le champ de pesanteur terrestre.

1.1. Première étude du champ de pesanteur terrestre.

1.1.1. Il s'agit d'Isaac Newton (1642-1727).

1.1.2. La force d'interaction gravitationnelle \vec{F}_G est :

- colinéaire à \overrightarrow{TM} ,
- attractive donc dirigée vers le point T,
- son intensité vaut $\frac{GM_T m}{r^2}$.

1.1.3. On peut écrire $\vec{F}_G = -\frac{GM_T m}{r^2} \vec{u}$.

1.1.4. On se place à la surface de la Terre en $r = R_T$, on a alors $\frac{\|\vec{F}_G\|}{m} = \frac{GM_T}{R_T^2}$ ce qui donne environ $9,824 \text{ m.s}^{-2}$.

1.1.5. D'après la troisième loi de Newton, la force exercée par la particule de masse m sur la Terre a la même droite d'action que \vec{F}_G et est opposée à \vec{F}_G .

1.2. Etude plus précise du champ de pesanteur terrestre.

1.2.1. Etude cinématique.

a. $\omega = \frac{2\pi}{T_S}$ où T_S est la durée du jour sidéral : $T_S = 86164 \text{ s}$ ce qui donne bien

$$\omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}.$$

b. La vitesse du point M s'écrit $\vec{V} = R_T \omega \vec{u}_1$.
L'intensité de la vitesse vaut 464 m.s^{-1} .

c. Le vecteur accélération \vec{a} du point M s'écrit $\vec{a} = -R_T \omega^2 \vec{u}$.
Son intensité vaut $3,39 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$.

1.2.2. Deuxième estimation de l'intensité du champ de pesanteur terrestre.

- a. Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel la première loi de Newton (« principe de l'inertie ») est vérifiée.
- b. La particule M est soumise à deux forces : la force \vec{T}_0 exercée par le fil et \vec{F}_G la force d'attraction due à la Terre.
- c. La seconde loi de Newton stipule que dans un référentiel galiléen, la somme des forces appliquées à un solide est égale au produit de la masse du solide par l'accélération de son centre d'inertie.

$$\text{On obtient : } m\vec{a} = \vec{T}_0 + \vec{F}_G.$$

- d. Cette définition correspond bien à une méthode expérimentale de mesure du poids d'un corps : par exemple on peut suspendre le corps à peser à un dynamomètre à l'aide d'un fil. Une fois l'équilibre relatif réalisé, la valeur indiquée par le dynamomètre est égale par définition au poids de ce corps.
- e. L'équation $m\vec{a} = \vec{T}_o + \vec{F}_G$ s'écrit en utilisant les questions précédentes :

$$-mR_T\omega^2\vec{u} = \vec{T}_o - \frac{GM_T}{R_T^2}\vec{u}$$
ce qui donne $\vec{T}_o = \frac{GM_T}{R_T^2}\vec{u} - mR_T\omega^2\vec{u}$ ce qui donne

$$\vec{g} = -\frac{GM_T}{R_T^2}\vec{u} + mR_T\omega^2\vec{u}$$
 soit $g = \frac{GM_T}{R_T^2} - R_T\omega^2$.
- On note que la rotation de la Terre sur elle-même a pour effet de faire diminuer la valeur de l'intensité de g.
- f. Numériquement on trouve : à l'équateur $g = 9,791 \text{ m.s}^{-2}$ et au pôle nord $9,824 \text{ m.s}^{-2}$. On note donc que la prise en compte de la rotation de la Terre sur elle-même améliore la compatibilité du modèle avec les résultats expérimentaux mais cela ne suffit pas, il faut également prendre en compte l'influence de la forme de la Terre.

1.3. Influence de la lune et du soleil.

- 1.3.1. La courbe donnée présente de façon claire une structure de « battements » qui fait apparaître plusieurs temps caractéristiques : l'onde semi-diurne solaire de période 12h et l'onde semi-diurne lunaire de période 12h 25 mn. On distingue ainsi un battement dont la durée typique est de 30 jours environ soit la durée d'une « lunaison ». Mais on note tout de même une structure plus complexe du signal qu'une approche élémentaire ne permet pas de justifier.

1.3.2. Applications numériques.

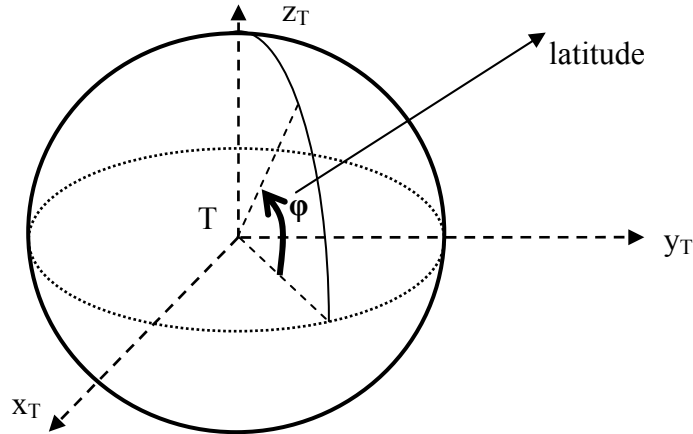
- a. Pour la Lune, on trouve une amplitude de variation de 0,11 mGal environ.
b. Pour le Soleil, on trouve une amplitude de variation de 0,05 mGal environ.
c. L'influence de la Lune est le double de celle du Soleil. La Lune est moins massive que le Soleil mais elle est plus proche de la Terre.
Les valeurs expérimentales de l'amplitude des variations qui figurent sur la figure 3 sont compatibles avec les valeurs précédentes : de l'ordre de 0,1 mGal.

Notons enfin que l'influence de la Lune et du Soleil se traduit également par la déformation de la Terre « solide » dont l'amplitude des variations est de plusieurs dizaines de cm. Cette déformation doit être prise en compte pour rendre compte correctement des observations expérimentales.

2. Détection des cavités et hétérogénéités dans le sous-sol

2.1. Introduction.

- 2.1.1. La latitude d'un point est définie par le schéma ci-dessous. Elle ne repère naturellement pas de manière unique un point du globe.



- 2.1.2. Cette expression redonne les valeurs à l'équateur ($\approx 9,780 \text{ m.s}^{-2}$) et au pôle ($\approx 9,832 \text{ m.s}^{-2}$). On peut également noter que cette valeur de référence dépend que de la latitude ϕ du point, ce qui confirme que cette surface de référence est de révolution autour de l'axe des pôles. Notons enfin que cette expression prend en compte la rotation de la Terre et l'aplatissement de celle-ci.

2.2. Corrections gravimétriques.

2.2.1. Correction à l'air libre.

- g diminue avec la hauteur h .
- $g = \frac{GM_T}{r^2}$ avec $r = R_T + h$ donc $g = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}$.
- On part de $g = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}$, en utilisant l'approximation $\frac{1}{(R_T + h)^2} \approx \frac{1}{R_T^2} \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right)$,
 g peut s'écrire $g \approx g_0 - \alpha h$ avec $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$ et $\alpha = \frac{2GM_T}{R_T^3}$.
- Pour $h = 1038 \text{ m}$ on trouve $g - g_0 \approx -320 \text{ mGal}$.
- De la relation $g \approx g_0 - \alpha h$ on déduit $\Delta g \approx \alpha \Delta h$. Ainsi si Δg est de l'ordre de $5 \mu\text{Gal}$, alors la plus petite valeur de Δh mesurable est de l'ordre de $1,6 \text{ cm}$! Ceci montre que lors d'une campagne de mesures qui souhaite atteindre cette précision, il faut faire preuve de beaucoup rigueur dans la mise en œuvre de celle-ci.

2.2.2. Correction de plateau.

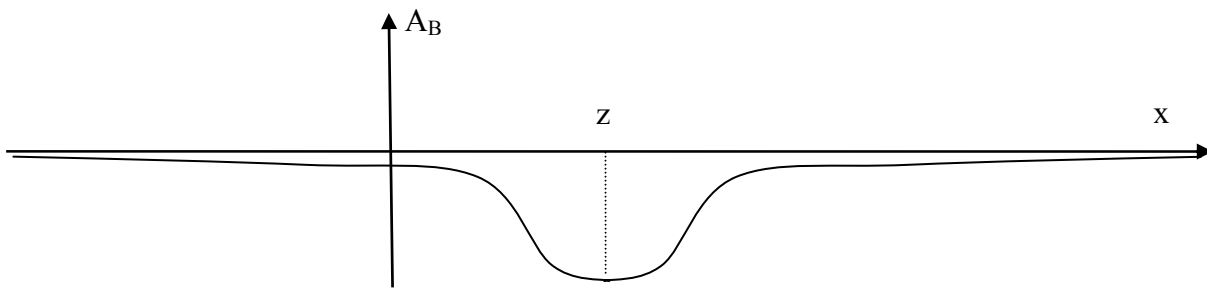
- En utilisant la loi de la gravitation, on retrouve bien les dimensions d'une force divisée par une masse ce qui correspond à la dimension d'une accélération.
- La correction de plateau accroît l'intensité du champ de gravitation, cela résulte du caractère attractif de la force d'interaction gravitationnelle.
- Pour $h = 1038 \text{ m}$ et $\rho_p = 2,80 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $2\pi G\rho_p h \approx +122 \text{ mGal}$.
- En prenant en compte les deux effets on trouve : $g - g_0 = \left(2\pi G\rho_p - \frac{2GM_T}{R_T^3}\right)h$.
- $g - g_0 \approx -198 \text{ mGal}$. On peut noter que les deux effets jouent dans le sens opposé.

2.3. Anomalies gravimétriques.

2.3.1. Détection d'une cavité.

- En l'absence de cavité, l'anomalie gravimétrique A_B est nulle.

- b. En présence d'une cavité, cette courbe présente un creux au niveau de la cavité car il y a un défaut de masse donc la valeur de g se trouve diminuée par rapport à la valeur attendue g_c .



- c. Il suffit de retirer au champ de gravitation la contribution créée par une sphère de rayon R en un point situé à une distance H . La masse de cette sphère vaut $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p$, la valeur

$$\text{maximale } A_{B\text{max}} \text{ de } A_B \text{ peut donc être estimée à } A_{B\text{max}} = -\frac{G \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p}{H^2}.$$

- d. $A_{B\text{max}} \approx -24 \mu\text{Gal}$. Cette valeur est accessible expérimentalement mais la mesure délicate à réaliser : sa mise en oeuvre nécessite un protocole précis et soigné.

2.3.2. Détection d'un dôme de sel au Texas.

- a. L'anomalie gravimétrique observée sur le dôme de sel est négative, ceci est dû au fait que la masse volumique du sel est inférieure à celle des sédiments voisins.

- b. On trouve $A_{B\text{max}} = \frac{G \frac{4}{3}\pi R^3 \Delta\rho}{H^2}$ avec $\Delta\rho = \rho - \rho_p$. L'application numérique donne

$A_{B\text{max}} \approx -10 \text{ mGal}$ ce qui est compatible avec les mesures effectuées sur le terrain.

Partie B : Aspects physico-chimiques de la formation des cavités souterraines.

1. Echanges de dioxyde de carbone à l'interface eau-atmosphère.

1.1.

1.1.1.

- a. La pression atmosphérique est de l'ordre de 1 bar et les pressions partielles en $O_{2(g)}$ et $N_{2(g)}$ sont respectivement de l'ordre de 0,2 bar et 0,8 bar.
b. Elle est bien sûr en augmentation ces dernières décennies.

1.1.2. $[CO_2(aq)] = 9,6 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$.

1.2.

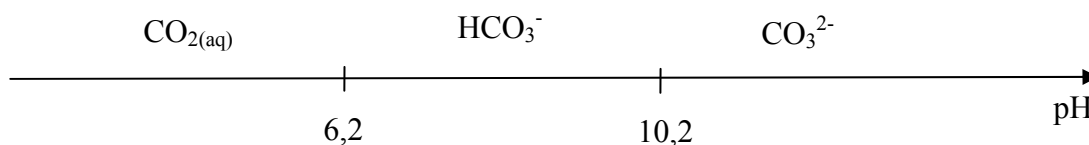
- 1.2.1. Un acide au sens de Bronsted est une espèce capable de fournir un proton H^+ ou de provoquer la libération d'un proton du solvant.

1.2.2. $K_{A1} = \frac{[HCO_3^-(aq)][H_3O^+]}{[CO_2(aq)]}$ et $K_{A2} = \frac{[CO_3^{2-}(aq)][H_3O^+]}{[HCO_3^-(aq)]}$. Les concentrations sont

déterminées à l'équilibre.

- 1.2.3. C'est un « diacide » car HCO_3^- , espèce produite par la réaction [1] est capable à nouveau de libérer un proton pour former CO_3^{2-} .

- 1.2.4. On a $pK_{A1} = 6,2$ et $pK_{A2} = 10,2$. On peut donc par superposition des deux diagrammes de prédominance de chaque acide établir le diagramme suivant :



- 1.2.5. $[H_3O^+] = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$, $[OH^-] = 4,0 \cdot 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1}$
 $[HCO_3^-(aq)] = 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$, $[CO_3^{2-}(aq)] = 6,1 \cdot 10^{-11} \text{ mol.L}^{-1}$.

On note bien sûr que le $CO_{2(g)}$ présent dans l'atmosphère a bien pour effet d'acidifier la solution.

Le diagramme de prédominance de la question précédente permettait de prévoir la légère prédominance de $CO_{2(aq)}$ devant HCO_3^- et le fait que les ions CO_3^{2-} et OH^- sont nettement minoritaires.

1.3.

- 1.3.1. On note que $\log(3) = 0,48$. Dans une représentation logarithmique, le point représentatif d'une pression de $3 \cdot 10^{-4}$ bar est pratiquement situé à égale distance de celui qui représente 10^{-4} bar et celui qui représente 10^{-3} bar.
- 1.3.2. L'eau qui « percole » dans le sol s'enrichit en $CO_{2(aq)}$ et d'après diagramme de la figure 9, son pH diminue et donc son acidité augmente.

2. Dissolution de la roche calcaire.

2.1. Dissolution de $CaCO_3(s)$.

- 2.1.1. La figure 10 montre clairement que la solubilité de la calcite augmente avec la pression partielle en $CO_2(gaz)$.
- 2.1.2. Un processus de dissolution possible des roches calcaires peut se décrire en plusieurs étapes. L'eau de pluie au contact des parties superficielles des sols rencontre des teneurs en $CO_{2(g)}$ qui augmentent. Elle s'enrichit donc en $CO_{2(aq)}$ et son acidité augmente. La courbe de la figure 10 nous montre que la solubilité de la calcite augmente avec la teneur en $CO_{2(aq)}$. L'eau devient donc de plus en plus agressive au cours de sa pénétration dans le sol au moins pendant une première phase. Cela explique l'érosion des roches par dissolution. Ce n'est bien sûr pas l'unique processus car l'érosion mécanique peut parfois jouer un rôle primordial par exemple dans les zones où la vitesse de l'écoulement des eaux de pluie est notable.

2.2. Formations de concrétions.

En arrivant au niveau de la voûte d'une cavité, les eaux de ruissellement, saturées en carbonate de calcium et très riches en $CO_2(aq)$ se trouvent brusquement au contact d'une atmosphère (celle de la cavité) moins riche en $CO_{2(g)}$. La courbe 10 montre alors que la solubilité de la calcite diminue notablement et le retour à une situation d'équilibre se traduit par une précipitation de l'excès de carbonate de calcium en solution et donc par un dépôt de matière qui explique les concrétions observées.

2.3. Evaluation de la durée de formation d'une cavité dans un massif calcaire.

- 2.3.1. La masse maximale de $CaCO_3(s)$ que l'on peut dissoudre en une année est de 170 g environ.
- 2.3.2. Le volume de $CaCO_3(s)$ dissout par an vaut $6,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$ pour 1 m^2 de surface au sol.
- 2.3.3. L'épaisseur de roche qui disparaît en une année vaut donc $6,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$. L'« ablation » se chiffre à 0,065 mm/an.

2.3.4. La durée nécessaire à la formation de cavités de l'ordre du mètre vaut environ $\frac{1}{6,5 \cdot 10^{-5}} \approx 15000$ ans.

2.3.5. Cette durée est bien sûr très brève à l'échelle des temps géologiques qui se chiffrent plutôt en millions d'années.

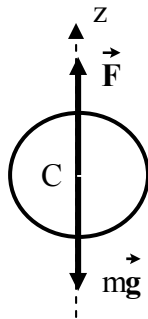
Partie C : Mesures de l'intensité du champ de pesanteur terrestre

1. Etude d'un gravimètre supraconducteur.

1.1. Existence d'un équilibre.

1.1.1. L'analyse dimensionnelle de la relation qui définit la constante α la dimensionne bien en $N \cdot m^7 \cdot A^{-2}$.

1.1.2.



La relation d'équilibre s'écrit $\vec{F} + m\vec{g} = \vec{0}$

1.1.3. Pour qu'un équilibre soit possible, il faut que $mg \leq 0,22 \alpha \frac{I_0^2}{a}$; $0,22 \alpha \frac{I_0^2}{a}$ correspond à la valeur maximale de la force. On en déduit l'expression littérale de la valeur minimale

$$I_{\min} = \sqrt{\frac{mga^7}{0,22\alpha}}$$

1.1.4. $I_{\min} = 11,8$ A.

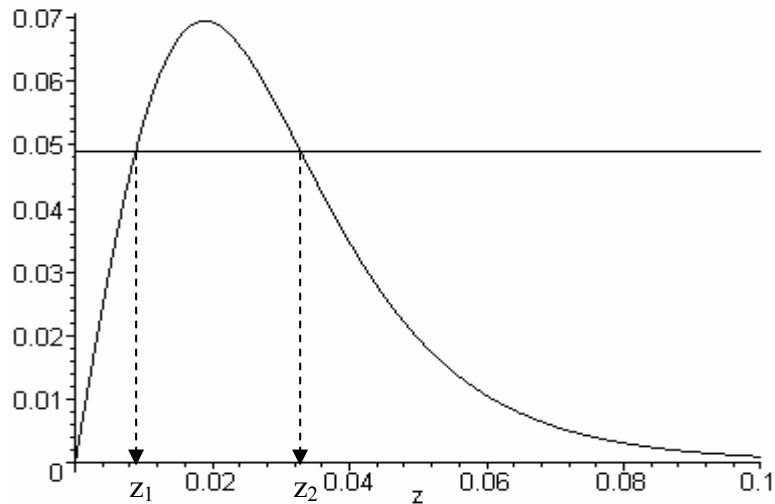
1.2. Stabilité des positions d'équilibre.

1.2.1. Cette courbe montre l'existence d'un maximum pour z de l'ordre de $\frac{a}{\sqrt{7}} = 1,9$ cm On peut

également vérifier que la valeur du maximum est de $0,22 \alpha \frac{I_0^2}{a} = 0,068$ N.

1.2.2. On traduit graphiquement la condition d'équilibre $\vec{F} + m\vec{g} = \vec{0}$. Elle se traduit par l'égalité : $F(z) = mg$ avec $mg \approx 0,049$ N. On trace la droite horizontale d'équation $y = 0,049$ les deux points d'intersection définissent z_1 et z_2 les deux positions d'équilibre possibles.

F(z) en N



1.2.3. On trouve graphiquement $z_1 \approx 0,9$ cm et $z_2 \approx 3,3$ cm.

1.2.4. Si l'on se place par exemple au voisinage de la position d'équilibre z_1 . On suppose qu'à la suite d'une perturbation z augmente et devienne supérieur à z_1 , on remarque que le poids qui est dirigé vers le bas possède une intensité constante et que l'intensité de la force de lévitation dirigée vers le haut augmente. La force résultante des deux effets est donc dirigée vers le haut et tend donc à écarter davantage la sphère de sa position d'équilibre z_1 . Cette position d'équilibre est donc instable. Si l'on tient le même raisonnement pour la position d'équilibre z_2 , on montre aisément que l'action globale est une action de rappel, donc que la position d'équilibre z_2 est stable.

1.3. Etude de la sensibilité du gravimètre.

1.3.1. On peut noter que cette sensibilité est inférieure à la taille typique d'un atome. Ceci illustre de manière remarquable les précisions atteintes par ce type d'appareils qui relèvent du domaine de la métrologie de très haute précision.

1.3.2. Lorsque l'intensité de la pesanteur vaut g et l'intensité du courant vaut I_0 : on a

$$\alpha \frac{z_0}{(a^2 + z_0^2)^4} I_0^2 = mg.$$

Lorsque l'intensité de la pesanteur vaut $g + \delta g$ et l'intensité du courant vaut $I_0 + \delta I_0$: on a

$$\alpha \frac{z_0}{(a^2 + z_0^2)^4} (I_0 + \delta I_0)^2 = m(g + \delta g).$$

1.3.3. Des deux relations précédentes on déduit : $\frac{(I_0 + \delta I_0)^2}{I_0^2} = \frac{(g + \delta g)}{g}$ soit

$$\left(1 + \frac{\delta I_0}{I_0}\right)^2 = 1 + \frac{\delta g}{g}.$$

1.3.4. $\left(1 + \frac{\delta I_0}{I_0}\right)^2 \approx 1 + 2 \frac{\delta I_0}{I_0}$ donc on a bien $\frac{\delta g}{g} \approx 2 \frac{\delta I_0}{I_0}$.

1.3.5. Si $\frac{\delta g}{g} = 10^{-9}$ alors $\delta I_0 = 7 \cdot 10^{-9}$ A. Une nouvelle fois on remarque la petitesse des valeurs numériques des grandeurs à détecter. On peut noter qu'une telle variation de courant est parfaitement accessible à l'expérience.

2. Etude d'un gravimètre absolu à chute.

2.1. Questions relatives au dispositif expérimental.

- 2.1.1. Le vide permet bien sûr de limiter les frottements de l'air sur le coin de cube en chute libre. On approche ainsi au mieux les conditions « théoriques » de la chute libre.
- 2.1.2. Cette pression de 10^{-4} Pa est à comparer à la valeur de la pression atmosphérique usuelle qui est de l'ordre de 10^5 Pa. Il faut donc réduire la pression d'un facteur 10^9 , on a recouru pour cela à deux pompes à vide que l'on fait fonctionner successivement.
- 2.1.3. L'utilisation « astucieuse » d'une « chambre sans frottement atmosphérique » entourant l'objet en chute libre permet de réduire très largement les mouvements de l'air autour du coin de cube. L'effet des frottements de l'air se trouve donc encore très diminué.
- 2.1.4. Ce coin de cube de référence suspendu au bâti du dispositif par un ressort permet de diminuer l'influence de l'agitation « microsismique » causée par exemple par les effets des vagues de l'océan (même lointain !) ou par l'activité industrielle ou humaine.

2.2. Approximation d'un champ de pesanteur uniforme.

- 2.2.1. La deuxième loi de Newton s'écrit en projection suivant l'axe Oz : $m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg_0$.

L'intégration de celle-ci donne l'équation horaire du mouvement : $z(t) = z_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g_0 t^2$.

- 2.2.2. La hauteur h de la chute libre vaut $h = 599d \approx 0,1896$ m. La durée de la chute libre s'écrit $\sqrt{\frac{2h}{g_0}}$ et vaut environ 0,1966 s.

- 2.2.3. On écrit les trois relations qui relient les « z_i » aux « t_i » soit :

$$z_1 = z_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} g_0 t_1^2 ; z_2 = z_0 + v_0 t_2 + \frac{1}{2} g_0 t_2^2 \text{ et } z_3 = z_0 + v_0 t_3 + \frac{1}{2} g_0 t_3^2.$$

On forme ensuite les différences $(z_3 - z_1)$ et $(z_2 - z_1)$ de façon à éliminer z_0 enfin on forme la combinaison $(z_3 - z_1)(t_2 - t_1) - (z_2 - z_1)(t_3 - t_1)$ pour éliminer v_0 . On établit alors la relation

$$g_0 = 2 \frac{(z_3 - z_1)(t_2 - t_1) - (z_2 - z_1)(t_3 - t_1)}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}$$

d'effectuer une bonne détermination de g_0 .

2.3. Prise en compte du « gradient de pesanteur ».

- 2.3.1. γ est positif car g augmente lorsque l'on se rapproche du sol.
- 2.3.2. $g(z_0) - g(z_0 + h) = -\gamma h$.
- 2.3.3. On évalue γh qui vaut 54,9 μGal . L'erreur commise sur la détermination de g_0 est de l'ordre de 4,4 μGal . Il est donc indispensable d'effectuer cette correction et de préciser dans le résultat la hauteur pour laquelle on détermine l'intensité du champ de pesanteur.
- 2.3.4. La deuxième loi de Newton s'écrit : $m \frac{d^2 z}{dt^2} = m(g_0 + \gamma(z - z_0))$.
- 2.3.5. L'approche « perturbative » de l'équation différentielle consiste donc à remplacer dans le « second membre » z par l'expression $z(t) = z_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g_0 t^2$.

On obtient alors l'équation différentielle suivante : $\frac{d^2 z}{dt^2} = g_0 + \gamma \left(v_0 t + \frac{1}{2} g_0 t^2 \right)$ que l'on

intègre deux fois en prenant en compte les conditions initiales :

$$\frac{dz}{dt} = v_0 + g_0 t + \gamma \left(v_0 \frac{t^2}{2} + g_0 \frac{t^3}{6} \right) \text{ puis}$$

$z(t) = z_0 + v_0 \left(t + \frac{\gamma}{6} t^3 \right) + \frac{g_0}{2} \left(t^2 + \frac{\gamma}{12} t^4 \right)$. D'où l'expression des fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$.

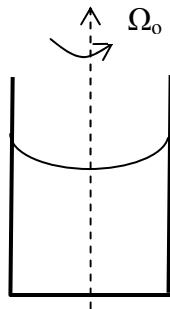
L'exploitation de cette équation permet d'évaluer la correction à apporter à la valeur « brute » obtenue pour l'intensité du champ de pesanteur. Usuellement cette correction est de l'ordre de $-25 \mu\text{Gal}$.

Partie D : La forme de la Terre

1. Illustration qualitative du problème.

1.1. La forme de la surface libre est bien sûr un plan horizontal.

1.2. Si on fait tourner à vitesse angulaire constante Ω_0 le récipient autour de son axe vertical ; la surface prend la forme d'un paraboléoïde de révolution comme le suggère la figure ci-dessous.



2. La forme du globe terrestre.

2.1. Etude cinématique.

2.1.1. La vitesse \vec{V} du point P par rapport au référentiel géocentrique s'écrit $\vec{V} = -y\omega \vec{e}_x$.

2.1.2. L'accélération \vec{a} vaut $\vec{a} = -y\omega^2 \vec{e}_y$.

2.2. Forces de pression interne.

$$2.2.1. \quad \vec{F}_G = -\frac{Gm}{r^2} \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \vec{u} = -\frac{mGM_T}{R_T^3} r\vec{u}.$$

2.2.2. D'après la deuxième loi de Newton, $m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{F}_P$ donc $\vec{F}_P = m\vec{a} - \vec{F}_G$ ce qui donne :

$$\vec{F}_P = -my\omega^2 \vec{e}_y + \frac{mGM_T}{R_T^3} r\vec{u}.$$

2.2.3. Sachant que $r\vec{u} = y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, on a : $F_{Py} = -my\omega^2 + \frac{mGM_T}{R_T^3} y$ et $F_{Pz} = \frac{mGM_T}{R_T^3} z$

2.3. La forme de la terre.

2.3.1. On exprime que le vecteur \vec{F}_p est colinéaire au vecteur normale à la surface et on établit la

$$\text{relation : } \frac{a^2}{c^2} = \frac{\frac{GM_T}{R_T^3}}{-\omega^2 + \frac{GM_T}{R_T^3}} .$$

2.3.2. Le rapport $\varepsilon = \frac{\omega^2 R_T^3}{2GM_T} \approx 1,72 \cdot 10^{-3}$, il est sans unité.

2.3.3. $f = \frac{a-c}{c} = \frac{1}{\sqrt{(1-2\varepsilon)}} - 1 \approx \varepsilon$. $f \approx 1,72 \cdot 10^{-3} \approx \frac{1}{580}$ il est donc plus faible que la valeur expérimentale qui est de l'ordre de $\frac{1}{298,25}$.

2.4. Amélioration du modèle.

2.4.1. La constante C^{ste} s'obtient en écrivant la relation

$$\frac{a}{\rho} + \varepsilon_1 \frac{a^3}{\rho^3} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \varepsilon_2 \frac{\rho^2}{a^2} \cos^2 \varphi = C^{ste} \text{ pour } \varphi = 0 \text{ et } \rho = a . \text{ On a ainsi :}$$

$$C^{ste} = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 .$$

2.4.2. On remplace $\rho = a(1 + \eta)$ dans l'expression :

$$\frac{a}{\rho} + \varepsilon_1 \frac{a^3}{\rho^3} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \varepsilon_2 \frac{\rho^2}{a^2} \cos^2 \varphi = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \text{ ainsi on obtient :}$$

$$\frac{a}{a(1+\eta)} + \varepsilon_1 \frac{a^3}{a^3(1+\eta)^3} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \varepsilon_2 \frac{a^2(1+\eta)^2}{a^2} \cos^2 \varphi = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 . \text{ On}$$

effectue les approximations $\frac{1}{1+\eta} \approx 1 - \eta$, $\frac{1}{(1+\eta)^3} \approx 1 - 3\eta$ et $(1+\eta)^2 \approx 1 + 2\eta$. On

remplace pour obtenir l'égalité suivante :

$1 - \eta + \varepsilon_1(1 - 3\eta)(1 - 3 \sin^2 \varphi) + \varepsilon_2(1 + 2\eta) \cos^2 \varphi \approx 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ dans cette égalité il ne faut pas garder les termes qui font apparaître les produits $\eta\varepsilon_1$ et $\eta\varepsilon_2$ qui sont beaucoup plus petits que les autres. On a finalement : $\eta \approx -(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sin^2 \varphi$ donc $h(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \approx 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

2.4.3. On obtient cette fois : $f \approx \frac{1}{1 - (3\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} - 1 \approx 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \approx 3,35 \cdot 10^{-3}$ ce qui donne $\frac{1}{298,5}$ valeur très proche de la valeur attendue.