Correction succincte Concours général Physique 2000 (ML)

1. Etude de deux points en interaction gravitationnelle

1.1 Le système étant par hypothèse isolé, d'après le principe d'inertie, le centre d'inertie G a un mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_o$ dont on postule l'existence

1.2 Il suffit d'appliquer le relation (mathématique) du barycentre au cas particulier des points matériels pondérés par les masses, le barycentre est alors le centre d'inertie du système :

Soit une origine O quelconque , on a la relation $(m_1 + m_2)\,\overrightarrow{OG} = m_1\ \overrightarrow{OO_1} + m_2\ \overrightarrow{OO_2}$

Il suffit alors de faire respectivement O = O_1 et O = O_2 => $\overrightarrow{GO_1} = -\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{D}$ et $\overrightarrow{GO_2} = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{D}$ avec $\vec{D} = \overrightarrow{O_1O_2}$

1.3 Soit le référentiel galiléen $\mathcal{R}_o$ dont on postule l'existence, le référentiel $\mathcal{R}_G$ ayant pour origine G et pour repère des axes qui restent parallèles à ceux de $\mathcal{R}_o$ est une référentiel en translation rectiligne uniforme (*on a vu à la question 1.1 que G est en mouvement rectiligne uniforme / $\mathcal{R}_o$*) donc le référentiel $\mathcal{R}_G$ est lui-même un référentiel galiléen.

REMARQUE IMPORTANTE*: le référentiel $\mathcal{R}_G$ est ce que l'on appelle un « référentiel barycentrique » c'est a à dire un référentiel d'origine : le centre d'inertie qui est* ***<u>toujours en translation par rapport à un référentiel galiléen</u>*** *de référence (ses axes restent parallèles à ceux du référentiel galiléen de référence).*

Mais ***ATTENTION*** ***<u>de façon générale ce référentiel n'est pas galiléen</u>*** *car G n'est pas nécessairement en mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel galiléen. Dans le cas présent, $\mathcal{R}_G$ est lui-même un référentiel galiléen parce que l'on a supposé que le système des deux masses est isolé.*

C'est une erreur classique de croire que le référentiel barycentrique est galiléen.

1.4 Le référentiel $\mathcal{R}_G$ étant galiléen, la seule force qui s'applique sur chacune des masses est la force de gravitation dont l'expression est donnée par la loi de gravitation universelle de Newton et le principe des interactions mutuelles:

$$\vec{F}_1 = \overrightarrow{F_{2/1}} = -\,\mathcal{G}\,\frac{m_1.m_2}{D^3}.\vec{D} \qquad \text{et} \qquad \vec{F}_2 = \overrightarrow{F_{1/2}} = -\,\overrightarrow{F_{2/1}} = -\,\vec{F}_1 = \mathcal{G}\,\frac{m_1.m_2}{D^3}.\vec{D}$$

REMARQUE : *La loi de Newton est évidemment une loi en $1/r^2$ or l'expression demandée par l'énoncé (« … en fonction de $\vec{D}$) introduit la grandeur $1/D^3$. Il convient de prendre garde à la nature de l'expression demandée de la force (on aurait le même problème avec la force de Coulomb en électrostatique par ex)*

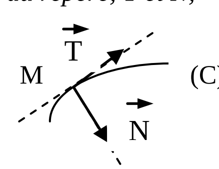
Soit m en M et m' en M' (avec MM' = r)en interaction gravitationnelle, la loi de Newton donne la relation :

$$\overrightarrow{F_{m'/m}} = -\,\mathcal{G}\,\frac{m\,.m'}{r^2}\vec{u} \quad \textit{avec } \vec{u} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{r}$$

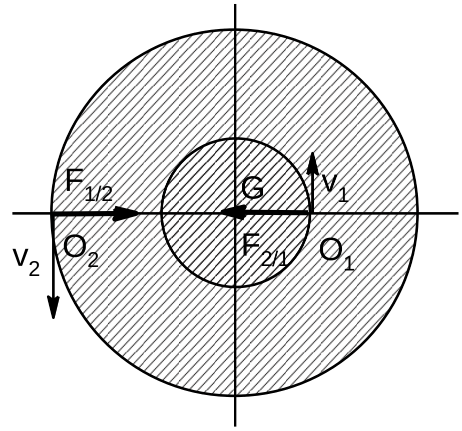
car $\vec{u}$ vecteur unitaire de MM' (défini de façon conventionnelle de façon centrifuge /M)

d'où la forme définitive de l'expression ci-dessus : $\overrightarrow{F_{m'/m}} = -\,\mathcal{G}\,\dfrac{m\,.m'}{r^3}\ \overrightarrow{MM'}$ *en $1/r^3$*

1.5 Le référentiel $\mathcal{R}_G$ étant galiléen, le système des deux masses étant isolés, la seule force appliquée sur chacune des masses est la force gravitationnelle due à l'autre masse. En écrivant pour chacune des masses la seconde loi de Newton : $\Sigma\vec{f} = m.\vec{a}$ => $\vec{a}_1 = -\,\mathcal{G}\,\dfrac{m_2}{D^3}.\vec{D}$ et $\vec{a}_2 = -\,\mathcal{G}\,\dfrac{m_1}{D^3}.\vec{D}$

Pour les deux masses, si les trajectoires sont des cercles de centre G, l'accélération est radiale (*dirigé suivant un rayon*) donc pas de composante tangentielle de l'accélération. Or dans le repère de Frenet : $\vec{a}_T = \dfrac{dv}{dt}\vec{T}$ Si $\vec{a}_T = 0$ => $\dfrac{dv}{dt} = 0$ => v = Cste mouvement uniforme	*rappel : Base de Frenet* *origine : le point considéré, et vecteur du repère, $\vec{T}$ et $\vec{N}$, vecteurs unitaires respectivement portés par la tangente et la normale à la trajectoire au point considéré ($\vec{T}$ dans le sens du mouvement et $\vec{N}$ vers la concavité de la courbe)* 

__Autre démonstration possible__ :



Soit le système constitué par l'une des masses, soient deux instants quelconques correspondant à des postions de cette masse sur sa trajectoire circulaire. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_K = \Sigma W^f$

La seule force appliquée à la masse et la force de gravitation due à l'autre masse. Or, à tout instant, cette force est radiale donc perpendiculaire à la trajectoire donc $W^f = 0 \Rightarrow \Delta E_K = 0 \Rightarrow v = \text{Cste}$ mouvement uniforme.

Donc pour chaque masse, le mouvement est circulaire uniforme. Or dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme on a la relation $a = v^2/r = \omega^2 .r$ d'où $\omega = \sqrt{a/r}$

Or pour la masse m_1 : $GO_1 = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}D$ et $a_1 = \mathcal{G}\dfrac{m_2}{D^2}$ => $\omega_1^2 = \dfrac{\mathcal{G}\,(m_1+m_2)}{D^3}$ **($3^{ème}$ loi de Kepler !)**

Et la masse m_2 : $GO_2 = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}D$ et $a_1 = \mathcal{G}\dfrac{m_1}{D^2}$ => $\omega_2^2 = \dfrac{\mathcal{G}\,(m_1+m_2)}{D^3}$ et $\omega_1 = \omega_2 = \Omega$

1.6 Voir ci-dessus

REMARQUE : La $3^{ème}$ loi de Képler établit une relation entre la période de révolution (T) et le rayon (a) de la trajectoire (T^2/a^3 = Cste). Pour la retrouver à partir des relations ci-dessus $\Omega^2 D^3 = \mathcal{G}\,(m_1 + m_2)$,il suffit de considérer que $\Omega = 2\pi/T$)

1.7 Relation évidente entre vitesse linéaire et vitesse angulaire $v = \omega\, r$ d'où $v_i = \dfrac{m_1.m_2}{m_i}\sqrt{\dfrac{\mathcal{G}}{(m_1+m_2).D}}$

1.8 Dans le cas où $m_1 >> m_2$ l'expression de la vitesse ci-dessus donne $v_1 = \dfrac{m_2}{\sqrt{m_1}}\sqrt{\dfrac{\mathcal{G}}{D}}$ donc $v_1 \approx 0$

En effet si la masse m_1 est nettement supérieure à m_2, G est pratiquement confondue avec O_1 et donc $v_1 \approx 0$

1.9 Soit $\vec{\sigma}_G = \overrightarrow{GO}_1 \wedge m_1\,\vec{v}_1 + \overrightarrow{GO}_2 \wedge m_2\,\vec{v}_2$ en remplaçant les $\overrightarrow{GO}_i$ obtenus en **1.2**

$= -\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{D} \wedge m_1\,\vec{v}_1 + \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{D} \wedge m_2\,\vec{v}_2$ en tenant compte que $\alpha .\vec{V} \wedge \beta\,\vec{V}' = \alpha\,\beta(\vec{V} \wedge \vec{V}')$

$= \dfrac{m_1\,m_2}{m_1+m_2}[\vec{D} \wedge (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)] = \vec{D} \wedge \mu\,\vec{v}_{12}$

d'où par identification avec la formule proposée $\vec{v}_{12} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ et $\mu = \dfrac{m_1\,m_2}{m_1+m_2}$ (*on appelle μ la masse réduite*)

***REMARQUE** : la démonstration ci-dessus permet de considérer que le moment cinétique du système dans le référentiel barycentrique est égal au moment cinétique d'un point **unique** de masse μ et de vitesse $\vec{v}_{12}$*

1.10 Soit un point O de masse m soumis à une force passant par G, on a donc $\vec{\sigma}_G = \overrightarrow{GO} \wedge m\,\vec{v}$

D'après la formule de dérivation donnée par l'énoncé : $\dfrac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \dfrac{d\,\overrightarrow{GO}}{dt} \wedge m\,\vec{v} + \overrightarrow{GO} \wedge m\dfrac{d\,\vec{v}}{dt}$

Or $\dfrac{d\,\overrightarrow{GO}}{dt} = \vec{v}$ donc $\dfrac{d\,\overrightarrow{GO}}{dt} \wedge m\,\vec{v} = \vec{0}$ Par ailleurs, $m\dfrac{d\,\vec{v}}{dt} = \vec{f}$ donc si $\vec{f}$ est colinéaire à $\overrightarrow{GO}$ alors $\overrightarrow{GO} \wedge m\dfrac{d\,\vec{v}}{dt} = \vec{0}$

D'où en définitive $\dfrac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{0}$ et $\vec{\sigma}_G$ = Cste (***conservation du moment cinétique dans le cas d'une force centrale***)

Dans le cas de deux points en interaction gravitationnelle, on a démonté en 1.9 que « tout se passe comme si.. » on n'avait un seul point matériel de masse μ et de vitesse $\vec{v}_{12}$ donc soumis à une force $\overrightarrow{f_{12}}$:

$$\overrightarrow{f_{12}} = \mu \frac{d\vec{v}_{12}}{dt} = \mu(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1\vec{f}_2 - m_2\vec{f}_1) = \vec{f}_2 = -\vec{f}_1 \text{ puisque } \vec{f}_1 = -\vec{f}_2 \text{ … qui passent par G}$$

Donc on se retrouve dans le cas précédent et $\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma}_G = \text{Cste}$

REMARQUE : *l'énoncé ne le demande pas mais il est intéressant de voir ce que vaut ce moment cinétique…*

Le point fictif de masse réduite μ et de vitesse $\vec{v}_{12}$ est donc soumis à une force $\overrightarrow{f_{12}}$ centrale (dirigée vers G). Le mouvement de ce point est donc, comme démontré plus haut, un mouvement circulaire (de rayon D) uniforme.

Comme $\overrightarrow{f_{12}} = \mu \frac{d\vec{v}_{12}}{dt} = \mu(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = \vec{f}_2 = -\vec{f}_1$ ce point a même accélération que les points O_1 et O_2 donc il tourne donc avec la même vitesse angulaire autour de G soit Ω. Il s'ensuit que $\vec{\sigma}_G = \mu D^2 \Omega \vec{k}$ (avec $\vec{k}$ vecteur unitaire $\perp$ au plan de la trajectoire)

1.11 $E_K = ½\ m_1 v_1^2 + ½\ m_1 v_1^2$ or d'après 1.7 : $v_i = \frac{m_1.m_2}{m_i}\sqrt{\frac{\mathcal{G}}{(m_1+m_2).D}}$

Donc $E_K = ½\ (m_1.m_2)^2 \frac{\mathcal{G}}{(m_1+m_2).D}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$ avec $\Omega^2 = \frac{\mathcal{G}\ (m_1+m_2)}{D^3}$ et $\mu = \frac{m_1\ m_2}{m_1 + m_2}$

D'où $E_K = ½\ \mu\ \Omega^2 D^2$ (c'est-à-dire l'énergie du point fictif de masse μ tournant d'un mouvement circulaire (de rayon D) uniforme (de vitesse angulaire Ω donc de vitesse « linéaire » $v = \Omega.D$)

1.12 D'après l'énoncé $dE_p = \mathcal{G}\frac{m_1.m_2}{D^2}dD$ d'où par intégration $E_p = -\mathcal{G}\frac{m_1.m_2}{D} + \text{Cste}$

Si on prend $E_p = 0$ pour $D = \propto$, cela revient à considérer que la constante est nulle d'où $E_p = -\mathcal{G}\frac{m_1.m_2}{D} = -\mu\ \Omega^2 D^2$

Et $E_m = E_K + E_p = ½\ \mu\ \Omega^2 D^2 - \mu\ \Omega^2 D^2 = -½\ \mu\ \Omega^2 D^2$

REMARQUE : *On observe donc que $E_p = -E_K$ et $E_m = -2E_K = -½\ \vec{\sigma}_G.\Omega\vec{k} = -½\ \vec{\sigma}_G.\vec{\Omega}$ avec $\vec{\Omega} = \Omega\vec{k}$*

1.13 Le terme correctif de l'énergie cinétique est don c $E_{Kcorr} = 1/5(m_1.\ GO_1^2 + m_2.\ GO_2^2).\ \Omega^2$

Or 1.6 $GO_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}D$ et $GO_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}D$ donc $E_{Kcorr} = \frac{1}{5}\ \mu^2.\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\ \Omega^2 D^2 = \frac{1}{5}\ \mu\ \Omega^2 D^2$

REMARQUE : *Ce résultat pouvait être directement obtenu en raisonnant sur la particule fictive unique de masse* μ

Même raisonnement pour le moment cinétique : $\vec{\sigma}_{G\ corr} = \frac{2}{5}\ \mu\ D^2\Omega\vec{k}$

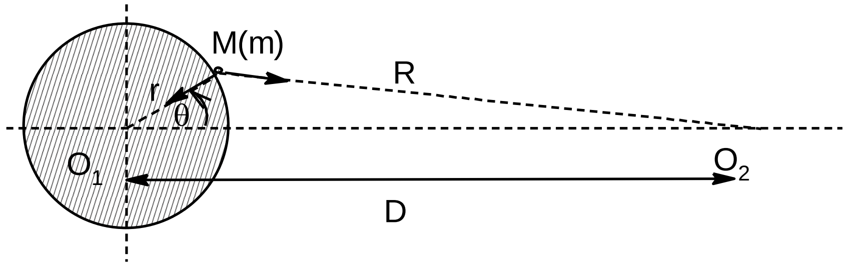
Donc globalement : $E_{K\ total} = \frac{1}{2}\ \mu\ \Omega^2 D^2 + \frac{1}{5}\ \mu\ \Omega^2 D^2 = \frac{7}{10}\ \mu\ \Omega^2 D^2$

Et $\vec{\sigma}_{G\ total} = \mu\ D^2\Omega\vec{k} + \frac{2}{5}\ \mu\ D^2\Omega\vec{k} = \frac{7}{5}\ \mu\ D^2\Omega\vec{k}$

REMARQUE : *On a toujours la relation $E_K = ½\ \vec{\sigma}_G.\Omega\vec{k} = ½\ \vec{\sigma}_G.\vec{\Omega}$*

2. Etude statique des marées

2.1 Soit un point à la surface de l'astre A_1 : (*dans la situation réelle r << R*) figure 2 :



En M : $\vec{F}_g = m\,\vec{a}\,(M) = -\mathcal{G}\,\frac{m.m_1}{r^3}.\,\overrightarrow{O_1M} \quad - \mathcal{G}\,\frac{m.m_2}{R^3}.\,\overrightarrow{O_2M}$ d'où $\vec{a}(M) = -\mathcal{G}\,\frac{m_1}{r^3}.\,\overrightarrow{O_1M} - \mathcal{G}\,\frac{m_2}{R^3}.\,\overrightarrow{O_2M}$

2.2 L'astre A_1 ne subit que l'action gravitationnelle de l'astre A_2 donc $\vec{a}(O_1) = -\mathcal{G}\,\frac{m_2}{D^3}.\,\overrightarrow{O_2O_1}$

Donc $\vec{g}(M) = \vec{a}(M) - \vec{a}(O_1) = -\mathcal{G}\,\frac{m_1}{r^3}.\,\overrightarrow{O_1M} - \left[\,\mathcal{G}\,\frac{m_2}{R^3}.\,\overrightarrow{O_2M} - \mathcal{G}\,\frac{m_2}{D^3}.\,\overrightarrow{O_2O_1}\,\right]$

$= \vec{G}_{A1/M} + (\vec{G}_{A2/M} - \vec{G}_{A2/O1})$

= champ de gravitation « normal » de A_1 en M + terme correctif (= $\vec{\gamma}_{(M)}$) dû à la différence de champ de gravitation dû à A_2 entre M et O_1

Par définition, le poids d'un objet est la force de gravitation mesurée dans le référentiel terrestre. Par analogie, la pesanteur de *m* serait la force de gravitation mesurée dans un référentiel $\mathcal{R}_1$ lié à l'astre A_1.

Soit ce référentiel $\mathcal{R}_1$ lié à O_1 que l'on supposera en translation par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$ dont on postule l'existence. Par définition du poids, il s'ensuit que $\vec{g}(M) = \vec{G}(M) - m.\,\vec{a}_e\,(M)$ avec. $\vec{a}_e$ accélération d'entraînement du référentiel $\mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0$ Or $\vec{G}(M) = \vec{G}_{A1/M} + \vec{G}_{A2/M}$ champ de gravitation respectivement dû à A_1 et A_2

Par ailleurs dans le référentiel $\mathcal{R}_0$, si on considère le référentiel $\mathcal{R}_1$ uniquement en translation $\mathcal{R}_0$, on a, pour l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e\,(M) = \vec{a}_e\,(O_1) = \vec{G}_{A2/O1}$

d'où $\vec{g}(M) = \vec{G}_{A1/M} + \vec{G}_{A2/M} - \vec{G}_{A2/O1}$ (*soit la relation obtenue ci-dessus*) qui représente bien la pesanteur

2.3 Le terme correctif correspond donc à $\vec{g}_{corr} = \vec{\gamma}_{(M)} = -\mathcal{G}\,m_2\left[\frac{1}{R^3}\,\overrightarrow{O_2M} - \frac{1}{D^3}\,\overrightarrow{O_2O_1}\right]$

En considérant que $\overrightarrow{O_2M} = \overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1M}$ l'expression de $\vec{\gamma}_{(M)}$ devient $\vec{\gamma}_{(M)} = -\mathcal{G}\,m_2\left[\frac{1}{R^3}\,\overrightarrow{O_1M} - \left(\frac{1}{D^3} - \frac{1}{R^3}\right)\,\overrightarrow{O_2O_1}\right]$

Or le premier terme a pour direction $\overrightarrow{O_1M}$, il vient juste apporter une correction très petite (parce que proportionnelle à $1/D^3$ en considérant $D \approx R$) au champ de pesanteur « normal » - qui est dirigé suivant $\overrightarrow{O_1M}$ - créé par l'astre A_1. Par contre le deuxième terme constitue une correction qui est colinéaire à O_1O_2 et dont l'importance dépend de la position de M sur l'astre A_1.

Considérons que le point M soit repéré par l'angle θ (*cf la figure 2 de l'énoncé reprise ci-dessus*) ; on a alors la relation $R^2 = (D - r\cos\theta)^2 + r^2\sin\theta^2$

$= D^2 + r^2 - 2\,r\,D\cos\theta = D^2\left(1 - 2\,\frac{r}{D}\cos\theta\right)$ (en négligeant r^2/D^2, terme du second ordre)

En utilisant la relation $(1+\varepsilon)^n = 1 + n\,\varepsilon$ (avec $\varepsilon = \frac{r}{D}$) => $R^{-3} = D^{-3}\left(1 + 3\,\frac{r}{D}\cos\theta\right)$

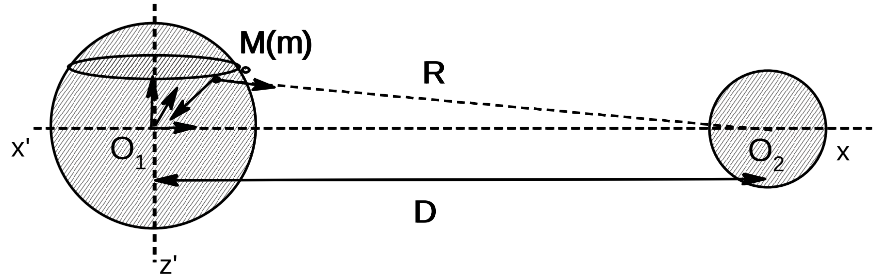
On peut alors écrire le terme correctif $\vec{\gamma}_{(M)} = -\frac{\mathcal{G}\, m_2}{D^3}\left(\overrightarrow{O_1M} - 3\frac{r}{D}\cos\theta\,\overrightarrow{O_1O_2}\right)$

Soit en appelant $\vec{u}$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{O_1O_2}$ $\left(\vec{u} = \frac{\overrightarrow{O_1O_2}}{D}\right)$ => $\vec{\gamma}_{(M)} = -\frac{\mathcal{G}\, m_2}{D^3}\left(\overrightarrow{O_1M} - 3\, r\cos\theta\,\vec{u}\right)$

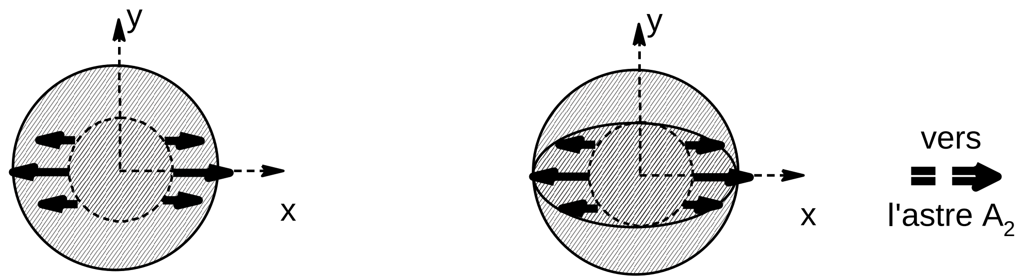
2.4 Evolution du terme correctif suivant la position sur l'astre A_1

REMARQUE : *la question 2.4 est ambigüe à cause de la figure 2 de l'énoncé qui n'est pas explicite car on ne comprend pas comment est situé exactement le point M.*

Il faut détailler la figure pour comprendre comment il faut voir le point M et ainsi pouvoir répondre à la question



vue "en perspective"



vue "de dessus" allure de la surface de fluide dans un plan méridien

Avec la figure ci-dessus (*en perspective*), on a défini un repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec i dirigé suivant $\overrightarrow{O_1O_2}$; O_2 est donc considéré « dans le plan équatorial » de l'astre A_1. On peut alors reprendre le calcul du terme correctif pour voir que seule la direction $\overrightarrow{O_1O_2}$ importe

Dans le repère considéré, on donc $\overrightarrow{O_1O_2}\begin{cases} D \\ 0 \\ 0 \end{cases}$ et $\overrightarrow{O_1M}\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$ donc $\overrightarrow{O_2M} = \overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_1O_2}\begin{cases} x - D \\ y \\ z \end{cases}$

$$\vec{\gamma}_{(M)} = -\mathcal{G}\, m_2 \left[\frac{1}{R^3}\overrightarrow{O_1M} - \left(\frac{1}{D^3} - \frac{1}{R^3}\right)\overrightarrow{O_2O_1}\right]$$

$$R^2 = \overrightarrow{O_2M}^{\,2} = (x - D)^2 + y^2 + z^2 = D^2 - 2\,x\,D + r^2$$

$$= D^2\left(1 - 2\frac{x}{D}\right) \qquad \text{(en négligeant } r^2/D^2\text{, terme du second ordre)}$$

En utilisant la relation $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\,\varepsilon$ (avec $\varepsilon = \frac{r}{D}$) => $R^{-3} = D^{-3}\left(1 + 3\frac{x}{D}\right)$

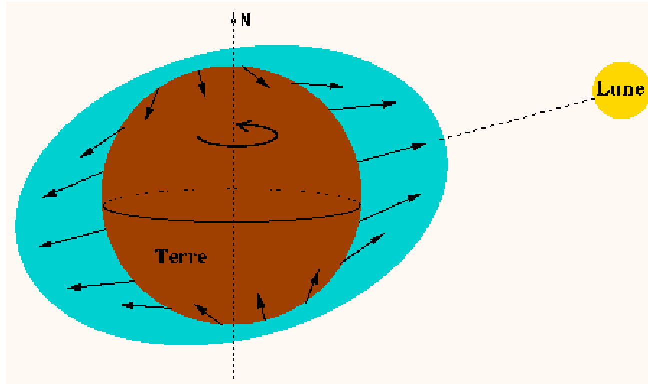
On peut alors écrire le terme correctif $\vec{\gamma}_{(M)} = -\frac{\mathcal{G}\, m_2}{D^3}\left(\overrightarrow{O_1M} + 3\frac{x}{D}\overrightarrow{O_1O_2}\right) = -\frac{\mathcal{G}\, m_2}{D^3}\left(\overrightarrow{O_1M} - 3\,x\,\vec{i}\right) = \frac{\mathcal{G}\, m_2}{D^3}\left(\overrightarrow{MO_1} + 3\,x\,\vec{i}\right)$

On observe que $\gamma(M)$ est maximal pour $\theta = 0$ et π ($x = \pm R$) et minimal pour $\theta = \pi/2$ et $3\pi/2$ ($x = 0$)

REMARQUE : *Avec le deuxième terme de $\vec{\gamma}_{(M)}$, « tout se passe comme si … » le plan méridien (yoz) - $\perp$ à la direction O_1O_2 - provoquait à un champ répulsif proportionnel à la distance à ce plan.*

2.5 L'effet de marée est proportionnel à m_i donc si $m_1 > m_2$ et $R_1 = R_2$ l'effet de marée est supérieur sur l'astre A_2

2.6 Voir le schéma de la couche de fluide sur les schéma de la page précédente (**attention sur le schéma de la page précédente n'est pas représentée la partie du terme de marée qui est radiale !**) ou ci-contre.



2.7 Dans le référentiel géocentrique , la Terre et la Lune ont les équations horaires respectives :

$\alpha_T = \omega_T .t + \text{Cste}$ et $\alpha_L = \omega_L .t + \text{Cste}$

avec ω_L (resp ω_T)$= \dfrac{2\,\pi}{T_L}$ (resp T_T)

En prenant les constantes de telle façon que $\alpha_T = \alpha_L = 0$ pour une marée haute, la nouvelle marée haute aura lieu quand $\alpha_T - \alpha_L = \pi$ d'où $(\omega_T . - \omega_T)\, T = \pi$

$\Rightarrow \quad T = \dfrac{1}{2}\ \dfrac{T_T \,.\, T_L}{(T_L - T_T)} = 0{,}517 \text{ d} \approx 12{,}4 \text{ h}$ (*cela correspond à un décalage d'un jour sur l'autre d'environ 50 minutes*)

2.8 Pour le point M_1 (sur l'axe O_1O_2 donc $\theta = 0$) on a d'après les relations obtenus précédemment :

$\vec{g}(M_1) \quad = -\,\mathcal{G}\,\dfrac{m_1}{r^3}.\,\overrightarrow{O_1M} - \dfrac{\mathcal{G}\,m_2}{D^3}\,(\overrightarrow{O_1M} - 3\ r\vec{i}\,)$ Soit en norme $\qquad g(M_1) = \mathcal{G}\,\dfrac{m_1}{r^2} - \dfrac{\mathcal{G}\,m_2}{D^3}(2.r)$

Soit l'expression du potentiel donné (pour θ= 0) pour M_1 : $V(M_1) = -\,\dfrac{A}{r} - 2\,B\,\dfrac{r^2}{D^3}$

Par dérivation, en tenant compte que : $\qquad dV = \left(\dfrac{A}{r^2} - 4\,B\,\dfrac{r}{D^3}\right) dr = -\,g(M_1)\,dr$

On trouve, par identification : $A = -\,\mathcal{G}\ m_1$ et : $B = -\,\mathcal{G}\ \dfrac{m_2}{2}$ et donc $\dfrac{A}{B} = 2\,\dfrac{m_1}{m_2}$

2.9 La différence de hauteur entre marée haute et marée basse correspond pour un même V à deux points correspondant respectivement à r_T et $r_T + h$ en admettant que le « point le plus bas » correspond à $\theta = \pi/2$

$$V(M)\ (\theta = \pi/2 \text{ marée basse} \Rightarrow r_T) \quad = \quad V(M')\ (\theta \ \Rightarrow\ )$$

$$-\,\frac{A}{r_T} + B\,\frac{r_T^{\,2}}{D^3} \quad = \quad -\,\frac{A}{r_T + h} + B\,\frac{(r_T + h)^2}{D^3}\,(1 - 3\cos^2\theta)$$

$$-\,\frac{A}{r_T}\left(1 - \frac{1}{(1 + \frac{h}{r_T})}\right) = B\,\frac{r_T^{\,2}}{D^3}\left[\ (1 + \frac{h}{r_T})^2\,(1 - 3\cos^2\theta)\ - 1\right]$$

Avec la relation $(1 + \dfrac{h}{r_T})^n = 1 + n\,\dfrac{h}{r_T} \quad \Rightarrow$

$$-\,\frac{A}{r_T}\,\frac{h}{r_T} = B\,\frac{r_T^{\,2}}{D^3}\left[(1 + 2\,\frac{h}{r_T})\,(1 - 3\cos^2\theta)\ - 1\right]$$

$$= B\,\frac{r_T^{\,2}}{D^3}\left[2\,\frac{h}{r_T}\,(1 - 3\cos^2\theta) - 3\cos^2\theta\right]$$

$\Rightarrow \dfrac{h}{r_T}\left[\dfrac{A}{B} - 2\,\dfrac{r_T^{\,3}}{D^3}\,(1 - 3\cos^2\theta)\right] = 3\,\dfrac{r_T^{\,3}}{D^3}\,\cos^2\theta$ or $\dfrac{A}{B} = 81$ et $\quad r_T \ll D \Rightarrow \qquad h = 3\,\dfrac{r_T}{\dfrac{A}{B}\dfrac{D^3}{r_T^{\,3}}}\,\cos^2\theta$

$$\text{Or } \frac{A}{B} = 2\,\frac{m_1}{m_2} = 2\,\frac{m_T}{m_L} = 2 \times 81{,}3 \ \text{ et } \ \frac{D_{TL}}{r_T} = \frac{3{,}8.10^5}{6{,}4.\ 10^3} = 59{,}4 \Rightarrow h_{max} \approx 0{,}56 \text{ m} \ \ (\text{pour } \theta = 0 \text{ et } \pi)$$

Cette valeur est faible devant les valeurs expérimentales. Cela montre que le modèle statique développé par Newton (fin XVIIème siècle) est insuffisant. Il faudra le modèle dynamique de Laplace (un siècle plus tard) pour avoir une interprétation plus conforme aux résultats expérimentaux. Ce modèle s'appuie sur deux principes : celui des oscillations forcées et celui de la superposition des petits mouvements

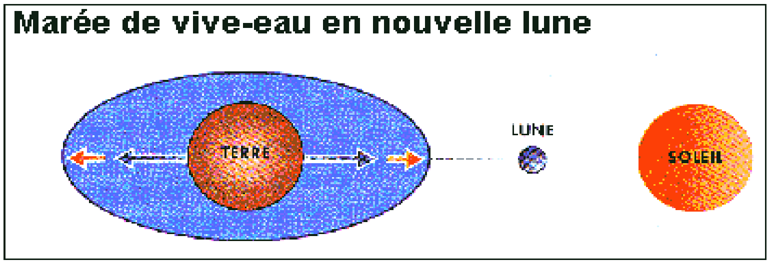
2.10 En reprenant les mêmes formules mais en considérant les données du Soleil :

$\frac{A}{B} = 2\frac{m_1}{m_2} = 2\frac{m_T}{m_S} = 6{,}0.10^{-6}$ et $\frac{D_{TS}}{r_T} = \frac{1{,}5.10^8}{6{,}4.\ 10^3} = 2{,}34\ .10^4 \Rightarrow h'_{max} = 0{,}24$ m (*par rapport /Lune :* $m_S/M_L \times (D_{TL}/D_{TS})^3$)

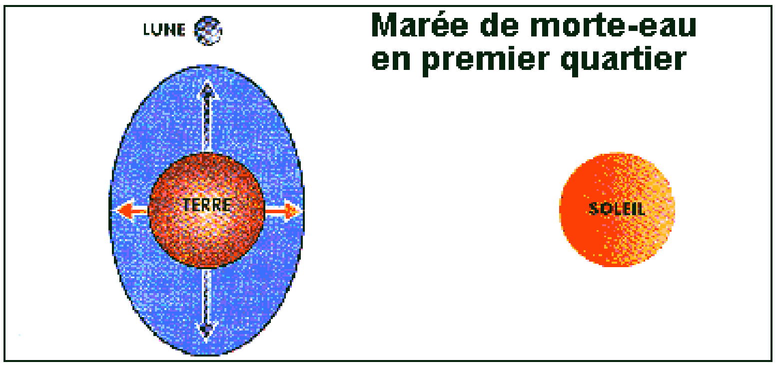
2.11 « Vives eaux » et « mortes eaux » suivant que les effets de la Lune et du Soleil se compensent.

Marée de vive-eau, marée de morte-eau (site http://www.shom.fr/)

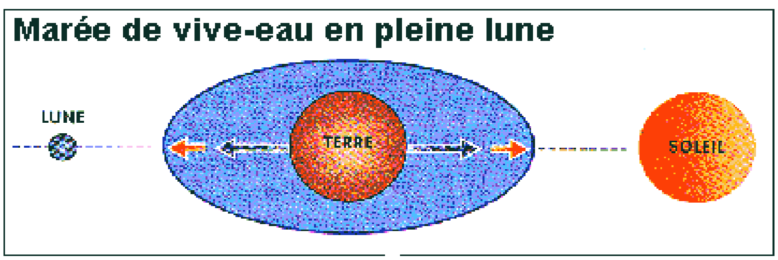
La marée étant générée par la Lune et le Soleil, les actions de ces deux astres peuvent s'ajouter ou se contrarier selon leurs positions relatives. Les variations de hauteur d'eau sont conditionnées par les phases de la Lune



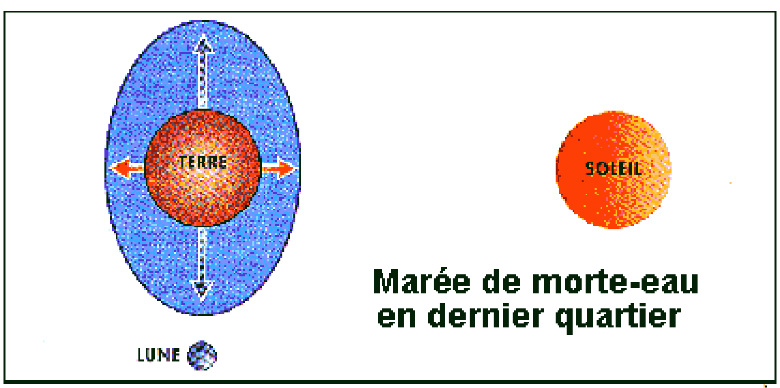
Les trois astres sont alignés ; les forces s'additionnent ; les marées sont importantes.



Les trois astres forment un angle droit ; les forces se contrarient ; les marées sont faibles.



Les trois astres sont alignés ; les forces s'additionnent ; les marées sont importantes.



Les trois astres forment un angle droit ; les forces se contrarient ; les marées sont faibles.

Lorsque le marnage (dénivellation entre la pleine mer et la basse mer) passe par un maximum, la marée est dite de **vive-eau**. Elle correspond aux phases de nouvelle lune et de pleine lune appelées **syzygies**. Elle s'explique par les effets conjugués de la Lune et du Soleil.

Lorsque le marnage passe par un minimum, la marée est dite de **morte-eau**. Elle correspond aux phases de premier et de dernier quartiers de la Lune, appelées **quadratures**. Elle s'explique par les effets opposés de la Lune et du Soleil.

Donc, à chaque pleine lune et à chaque nouvelle lune, environ tous les 14-15 jours, les amplitudes de marée passent par un maximum. A chaque premier quartier et dernier quartier, les amplitudes de marée passent par un minimum.

3. Limite de Roche

3.1Soit un masse ponctuelle *m* placée en un point P à la surface de l'astre A_2 et sur l'axe O_1O_2 (*schema supra*).
Cette masse subie la force de gravitation :

$$\vec{F_g} = \overrightarrow{F_{A1/m}} + \overrightarrow{F_{A2/m}} = - \mathcal{G}\, \frac{m.m_1}{(D-r_2)^3}.\, \overrightarrow{O_1P} \;-\; \mathcal{G}\, \frac{m.m_2}{r_2^3}.\, \overrightarrow{O_2P} = m\,.\, \vec{g}(P)$$

$$\text{D'où } \vec{g}(P) = - \mathcal{G}\, [\frac{m_1}{(D-r_2)^3}.\, \overrightarrow{O_1P} + \frac{m_2}{r_2^3}.\, \overrightarrow{O_2P}]$$

3.2 Pour qu'il y ait cohésion du satellite A_2 , il faut que $\vec{g}(P)$ soit dirigé de P vers O_2 sinon le satellite A_2 « exploserait »
3.3 Pour trouver la valeur de D_m, il faut soit considérer que le point P est en mouvement dans le référentiel lié à A_1 supposé galiléen, soit considérer qu'il est en équilibre dans un référentiel lié à A_2 mais dans ce cas ce référentiel n'est pas galiléen et il faut tenir compte de la force d'inertie

Le point P est soumis d'une part aux deux forces de gravitation (question précédente) et à une force de contact $\overrightarrow{Fc}$

Dans Référentiel lié à A_1 (supposé galiléen)	Dans Référentiel lié à A_2 (s non galiléen)
Equation du mouvement de *P(m)* : $\overrightarrow{F_{A1/m}} + \overrightarrow{F_{A2/m}} + \overrightarrow{Fc} = m\, \vec{a_P}$ Avec pour un mouvement de rotation uniforme autour de A1, $\vec{a_P} = - \omega^2\, \overrightarrow{O_1P}$ En projection sur l'axe x'x , on retrouve l'équation (1) ci-contre	Relation d'équilibre de *P(m)* : $\overrightarrow{F_{A1/m}} + \overrightarrow{F_{A2/m}} + \overrightarrow{Fc} + \vec{F_i} = \vec{0}$ Avec $\vec{F_i}$ force d'inertie centrifuge Projection sur l'axe x'x (voir schéma ci-dessus) $m\, \mathcal{G}\, [\frac{m_2}{r_2^2} - \frac{m_1}{(D - r_2)^2}] + Fc + m\, \omega^2 (D-r_2) = 0 \quad (1)$ Le mouvement de P est le même que celui de A2 ; en admettant qu'il s'agit d'une rotation uniforme autour de $A_1 \Rightarrow \omega^2 = \mathcal{G}\, \frac{m_1}{D^3}$ (*question 1.5*) En tenant compte qu'au moment juste de la séparation $F_c = 0$ et faisant de nouveau la relation $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\,\varepsilon$: $\frac{m_2}{r_2^2} - \frac{m_1}{D^2}(1 + 2\frac{r_2}{D}) + \frac{m_1}{D^2}(1 - \frac{r_2}{D}) = 0$ D'où $\frac{m_2}{r_2^2} = 3\, \frac{m_1}{D^2}\frac{r_2}{D} \Rightarrow D_m = r_2 \sqrt[3]{\frac{3\, m_1}{m_2}}$

Si on considère que A_1 et A_2 sont sphériques et homogènes alors $m_i = \rho_i V_i$ avec $V_i = 4/3\, \pi\, r_i^3$

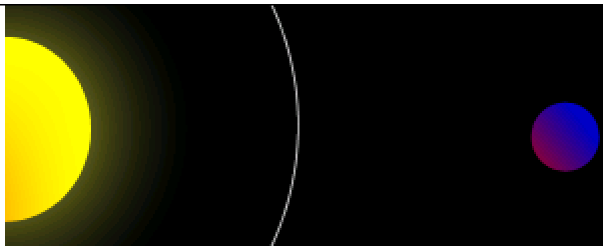
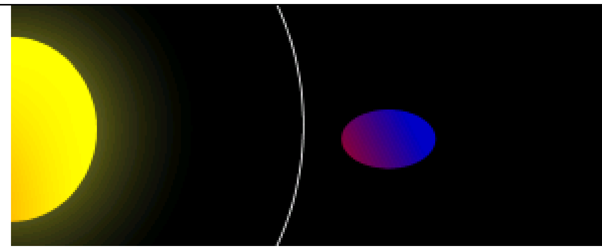
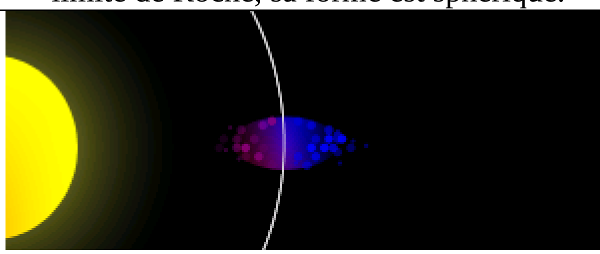
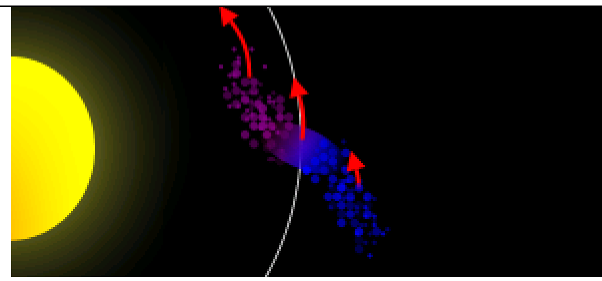
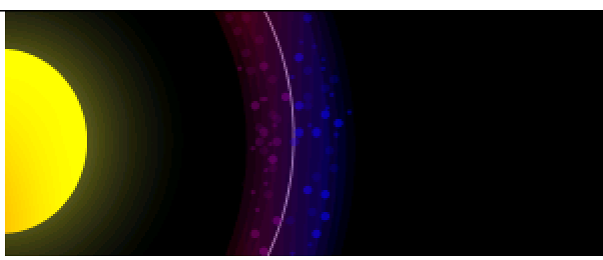
$$\Rightarrow D \geq D_m = r_2 \sqrt[3]{\frac{3\, \rho_1 r_i^3}{\rho_2 r_2^3}} = r_1 \sqrt[3]{\frac{3\, \rho_1}{\rho_2}}$$

3 .4 En tenant compte du facteur 2 correctif dû à Edouard Albert Roche $D_{mR} = 2\, r_2 \sqrt[3]{\frac{3\, m_1}{m_2}}$

AN dans le cas de la Lune et de la Terre : $D_{mR} = 2\, r_L \sqrt[3]{\frac{3\, m_T}{m_\Lambda}} = 2 \text{ x } 1{,}7.10^3 \sqrt[3]{3 \text{ x } 81{,}3} = 2{,}1.10^4$ km

(**littérature 17-18 000 km sauf Wikipedia !)**

Schema Wikipedia

 (1) Considérons un corps fluide qui maintient sa structure par sa gravité et qui orbite un objet massif, vu ici par le dessus du plan orbital. Éloigné de la limite de Roche, sa forme est sphérique.	 (2) Plus près de la limite le corps est déformé par les forces de marée.
 (3) À l'intérieur de la limite la gravité du fluide n'est plus suffisante pour maintenir la structure du corps, et les forces de marée le désintègrent.	 (4) Les flèches rouges représentent le déplacement des restes du satellite. Les particules plus proches orbitent plus rapidement que celles plus éloignées.
 (5) La différence de vitesse orbitale finit par former un anneau à partir des particules du corps initial.	Toutes les planètes géantes ont à la fois des anneaux et des satellites. Les anneaux orbitent à proximité de la planète, accompagnés de tout petits satellites. Loin de la planète, il n'y a que des satellites (et des anneaux de poussière instables). La limite de Roche sépare ces 2 régions. Le champ de marée brise les satellites qui s'aventurent à l'intérieur de cette limite. Elles empêchent aussi les anneaux de s'accréter en satellites. (*d'où la réponse à la question 3.5*)

3.5 Hypothèse non plausible car en quittant la Terre, les roches seraient dans la limite de Roche de la Terre, donc auraient été désagrégées.

3.6 Limite de Roche pour les anneaux de Saturne : $D_m = \; = 2 r_S \sqrt[3]{\frac{3\, \rho_1}{\rho_2}} \Leftrightarrow \frac{D_m}{r_S} = 2 \sqrt[3]{\frac{3\, \rho_1}{\rho_2}} = 2 \sqrt[3]{3 \text{ x } 0{,}694} = 2.55$

Or le rayon extérieur de l'anneau vaut 2,25 r_S donc les roches sont le résultat d'une désintégration (*voir schéma ci-dessus)*

4. Evolution du système planète-satellite

4.1

4.2

5. Etude dynamique des marées

5 .1

5.2

6. Etude simplifiée de la houle

   6.1

   6.2

Annexe

Représentation complète du terme de marée : résultante de la partie radiale et la partie dirigée vers la Lune

On comprend mieux ainsi pourquoi à marée basse (*resp* haute) le niveau de l'eau est inférieur (supérieur) à celui que l'on aurait sans terme de marée (surface équipotentielle a priri sphérique)