

Sujet du concours général

SESSION DE 1993

COMPOSITION DE SCIENCES PHYSIQUES (Classes terminales C, D et E)

DURÉE : 5 heures

Les parties I et II sont indépendantes.

La partie III utilise seulement les résultats affichés dans le libellé de la question II.3.c.

Données :

Masse de l'électron $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg ;

Charge de l'électron $-e = -1,6 \times 10^{-19}$ C.

Si x est voisin de 0 : $\exp x \approx 1 + x$ où \exp désigne la fonction exponentielle.

I. RÉFRACTION

- I.1. Un milieu transparent homogène et isotrope est caractérisé par son indice de réfraction n .
- Rappeler la relation entre l'indice, la vitesse de la lumière dans le milieu et la vitesse de la lumière dans le vide.
 - Rappeler en quelques mots en quoi consiste le phénomène de réfraction.
 - Rappeler les lois de Descartes pour la réfraction.
- I.2. a. Soit un empilement de lames à faces parallèles de faible épaisseur avec $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ (fig. 1). Dessiner la marche d'un rayon lumineux à travers l'empilement.

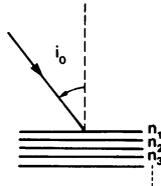


Figure 1

- b. Soit maintenant un milieu transparent dont l'indice $n(z)$ est une fonction continue de la seule coordonnée z (fig. 2). En vous fondant sur la question précédente, donnez l'allure de la marche d'un rayon lumineux traversant le milieu si $\frac{dn}{dz} > 0$. Que peut-on dire de la quantité $n \sin i$?

Connaissez-vous des exemples illustrant cette situation ?

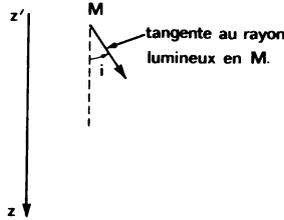


Figure 2

I.3. Réfraction électronique.

- a. Un filament de tungstène chauffé émet, par effet thermoélectronique, des électrons ayant une vitesse pratiquement négligeable. Le filament ou cathode est porté à un potentiel $V_C < 0$. Une anode, percée d'une petite ouverture O est portée au potentiel $V_A = 0$.

Calculer la vitesse des électrons en O en fonction de la charge élémentaire e , de la masse m d'un électron et de la tension $U = V_A - V_C$.

Application numérique : $U = 1.0 \text{ kV}$.

- b. Deux grilles métalliques G_1 et G_2 planes et parallèles (fig. 3) sont soumises à la tension $U' = V_{G_2} - V_{G_1} > 0$.

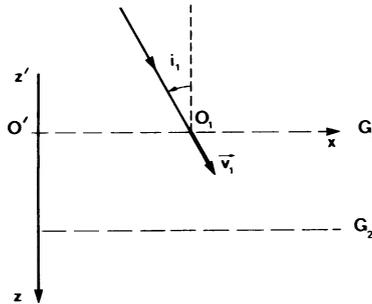


Figure 3

Un faisceau homogénéique d'électrons, de vitesse \vec{v}_1 arrive sur G_1 en O_1 avec l'incidence d'angle i_1 .

- α. Donner les caractéristiques du champ électrostatique entre les grilles. Le représenter sur une figure.
- β. Donner, **sans démonstration**, la nature de la trajectoire d'un électron M entre les grilles. Représenter l'allure de cette trajectoire.
- γ. Quelle est la nature du mouvement de la projection de M sur l'axe $O'x$ parallèle aux grilles ? En déduire la relation entre la vitesse v de l'électron et l'angle i que fait le vecteur vitesse avec $O'z$ (fig. 3). Quelle est la relation entre i_1 , i_2 , v_1 et v_2 où i_2 est l'angle de sortie en G_2 et v_2 la vitesse en G_2 ?
- δ. Quelle analogie avec l'optique ces résultats vous suggèrent-ils ?

I.4. On se propose de développer l'analogie précédente dans le cas d'un milieu transparent et isotrope dont l'indice est fonction de la seule coordonnée z (voir I.2.b.)

a. On introduit à cet effet une particule **fictive** dont la trajectoire devra se confondre avec le rayon lumineux. On attribue à cette particule fictive une masse unité et une vitesse $\vec{v} = n\vec{u}$ où n est l'indice du milieu au point M considéré et \vec{u} le vecteur unitaire tangent en M au rayon lumineux considéré et dirigé dans le sens de propagation. Justifier brièvement ces choix.

b. En considérant le mouvement de la particule fictive projeté sur Oz, montrer que l'accélération de ce mouvement est :

$$a_z = n \frac{dn}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} n^2 \right).$$

c. Quelle est la correspondance entre l'indice n et le potentiel U_M en M dans le problème d'électrostatique (voir I.3.) ? Quel est l'intérêt d'une telle correspondance ?

I.5. Au voisinage d'un sol chauffé, la température de l'air varie avec la distance z au sol (fig. 4).

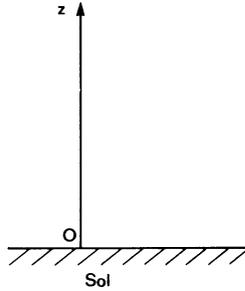


Figure 4

a. Dans quel sens s'effectue cette variation lorsqu'on s'éloigne du sol ? Justifier.

b. Prévoir qualitativement le sens de variation de l'indice de réfraction de l'air au voisinage du sol. Justifier.

c. On admet que cette variation est approximativement de la forme $n(z) = n_0 + \alpha z$ avec $|\alpha z| \ll n_0$ et où α est une constante. Quelle est, dans cette approximation, la forme des rayons lumineux ? Faire un dessin représentant un rayon lumineux émis parallèlement au sol. Quel type de phénomène peut-on expliquer de la sorte ?

I.6. Soit un dioptre plan séparant deux milieux transparents, homogènes et isotropes d'indices respectifs n_1 et n_2 . Montrer que le parcours de la lumière est parmi ceux reliant deux points donnés A et B, celui qui rend le temps de parcours minimal. On pourra prendre comme variable l'angle d'incidence i_1 et noter que HH' (fig. 5) a une valeur donnée.

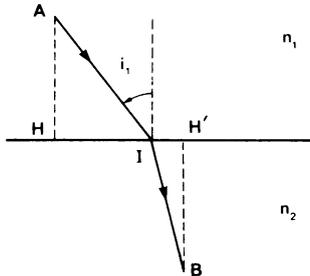


Figure 5

II. LENTILLES MINCES

II.1. Soit un prisme d'angle A , taillé dans un verre d'indice n . On considère seulement les rayons situés dans un plan de section principale, c'est-à-dire perpendiculaire à l'arête du prisme.

a. Un rayon lumineux arrivant sur le prisme avec l'angle d'incidence i ressort du prisme avec l'angle d'émergence i' (fig. 6). Établir que l'angle de déviation D du rayon lumineux a pour expression : $D = i + i' - A$.

b. Dans le cas où i et A sont petits, montrer que $D \approx (n - 1) A$.

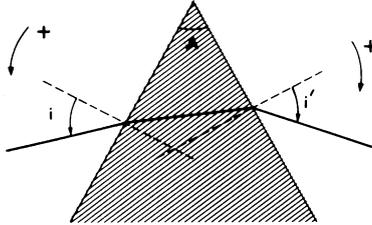


Figure 6

II.2. Une lentille est un milieu transparent qu'on suppose ici limité par deux calottes sphériques ou par une calotte sphérique et un plan. L'expérience montre qu'une lentille mince utilisée dans les conditions de Gauss est **stigmatique** et **aplanétique**.

a. Qu'appelle-t-on conditions de Gauss ?

b. Que signifient les adjectifs stigmatique et aplanétique pour un instrument d'optique ?

II.3. On se propose de retrouver directement les formules de Descartes applicables ici à une lentille mince dans l'approximation de Gauss. Pour cela, on considérera les rayons arrivant sur les bords de la lentille mince assimilée à un prisme d'angle petit A . On se limitera au cas d'une lentille biconvexe de rayon a (fig. 7). Toutes les grandeurs seront considérées en valeur absolue sauf indication contraire.

La lentille constituée d'un verre d'indice n est supposée placée dans l'air.

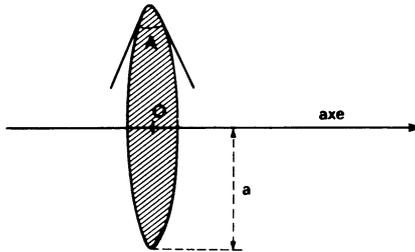


Figure 7

a. En considérant les réfractions successives d'un rayon incident parallèle à l'axe de la lentille, calculer la distance focale image f' de la lentille en fonction de n , A et a . Calculer de même la distance focale objet f . Exprimer f' (ou f) en fonction uniquement de n et des rayons R_1 et R_2 des sphères limitant la lentille.

b. Soit un point objet réel A situé sur l'axe de la lentille et donnant une image réelle A' .

Retrouver directement la relation de Descartes entre la position de l'objet et celle de l'image. On posera $p = OA$, $p' = OA'$ où O désigne le centre optique de la lentille. Reprendre la même question dans le cas où A est réel et son image virtuelle.

c. À partir de la relation de Descartes qu'on écrira ici en utilisant des grandeurs algébriques, en orientant l'axe de la lentille dans le sens de propagation de la lumière, trouver la relation (dite de Newton) entre \overline{FA} , $\overline{F'A'}$, $f = \overline{OF}$, $f' = \overline{OF'}$ où F et F' sont respectivement les foyers objet et image principaux de la lentille. Montrer que :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = ff'$$

Soit AB un petit objet perpendiculaire à l'axe de la lentille. Montrer que le grandissement a pour expressions :

$$\Gamma = - \frac{f}{\overline{FA}} = - \frac{\overline{F'A'}}{f'} \quad (\text{formules de Newton pour le grandissement}).$$

II.4. Reprendre les questions II.3.a., b., c. en supposant maintenant qu'un milieu transparent d'indice N est placé devant la lentille, la face arrière restant dans l'air. On montrera en particulier que :

$$f = \overline{OF} = - Nf' \quad \text{avec} \quad f' = \overline{OF'}$$

et que :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = ff'$$

II.5. Un champ électrostatique \vec{E} , non uniforme, règne dans une région R du laboratoire (fig. 8). R est telle que : $-\ell \leq x \leq \ell$ et $y^2 + z^2 \leq r^2$.

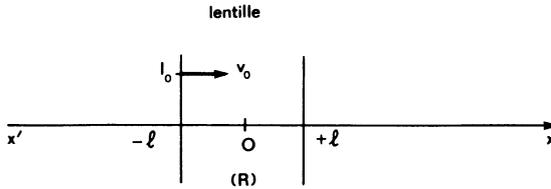


Figure 8

$\vec{E} = - 2\beta x\vec{i} + \beta y\vec{j} + \beta z\vec{k}$, où \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} sont les vecteurs unitaires du trièdre orthonormé $Oxyz$.

β est une constante.

ℓ et r sont des longueurs données. On suppose $r < \ell$.

À l'instant choisi pour origine des dates ($t = 0$), un électron de vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$ pénètre en I_0 dans R .

À cet instant :

$$x = x_0 = - \ell ;$$

$$y = y_0 \ll r ;$$

$$z = z_0 \ll r .$$

a. Quelle est la forme de R ? R porte dans la suite le nom de « lentille électrostatique ».

b. Montrer que, à l'extérieur de R , le mouvement d'un électron est rectiligne et uniforme si on néglige son poids et l'action de tout autre champ électrique ou magnétique.

c. Comment choisir le signe de β si l'on veut que le champ \vec{E} tende à maintenir l'électron au voisinage de l'axe $x'x$?

d. Donner l'expression du vecteur accélération d'un électron dans R. En déduire les coordonnées du vecteur accélération en fonction de β , e , m et des coordonnées x , y et z de l'électron.

En déduire les équations différentielles vérifiées séparément par x , y et z . On posera $\omega^2 = \frac{\beta e}{m}$.

e. a) Vérifier que la solution de l'équation différentielle en x est de la forme :

$$x = A \exp kt + B \exp(-kt) \quad \text{avec } k > 0$$

et déterminer k en fonction de ω . Déterminer aussi A et B compte tenu des conditions initiales.

β) Dans toute la suite, on supposera satisfaite la condition $v_0 \gg \omega \ell$. Montrer que cette condition entraîne que la vitesse \dot{x} reste pratiquement égale à v_0 .

γ) Dans cette même approximation, résoudre les équations en y et en z . Montrer que la trajectoire électronique reste au voisinage de $x'x$ (hypothèse paraxiale). Quelle est l'hypothèse correspondante en optique ?

δ) Donner les coordonnées du vecteur vitesse en I sur la face de sortie de la lentille.

Donner les coordonnées de la vitesse de l'électron en I. Calculer les coordonnées du point F', intersection de la trajectoire de l'électron avec l'axe $x'x$. La position de F' dépend-elle de I ? Justifier le nom de foyer donné à F'. Cette lentille électrostatique est-elle convergente ou divergente ?

Comment agir sur la distance focale de la lentille ?

Application numérique : Calculer la distance focale OF' pour : $\ell = 1,0 \times 10^{-4}$ m ;

$$\frac{\omega \ell}{v_0} = 10^{-2}.$$

III. MICROSCOPE

Le microscope est un système optique centré comportant deux systèmes optiques de même axe : l'objectif et l'oculaire. Un condenseur de lumière permet d'éclairer l'objet observé. On suppose ici que l'objectif et l'oculaire sont constitués chacun de lentilles sphériques (fig. 9).

• L'objectif est formé d'un ensemble assez complexe de lentilles. Il donne d'un objet AB perpendiculaire à l'axe de l'instrument une image réelle agrandie A_1B_1 .

• L'oculaire que nous assimilerons à une lentille mince L_2 unique de distance focale image f_2' sert de loupe pour observer l'image A_1B_1 donnée par l'objectif.

III.1. L'objectif est supposé stigmatique pour un point objet A situé sur l'axe et aplanétique pour un petit objet AB perpendiculaire à l'axe, cela bien que l'angle u des rayons lumineux avec l'axe puisse atteindre une valeur u_m de l'ordre de 70° .

En outre, on supposera éventuellement l'objet immergé dans un liquide d'indice N qui vient au contact de l'objectif (objectif à immersion).

L'objectif est caractérisé par son **ouverture numérique** : $\Omega_n = N \sin u_m$.

a. L'objectif fonctionne-t-il dans les conditions de Gauss ?

b. Pour l'optique paraxiale, on peut définir des foyers principaux objet et image F_1 et F_1' pour l'objectif ainsi que des distances focales f_1 et f_1' et appliquer les formules de Newton établies en II.3.c. avec $f_1 = -N f_1'$.

α) L'œil étant supposé normal et regardant à travers l'oculaire, où l'image A_1B_1 doit-elle se situer par rapport au plan focal objet de l'oculaire ? **Dans toute la suite, on supposera cette condition satisfaite**, la distance $\Delta = F_1'F_2$ du plan focal image de l'objectif au plan focal objet de l'oculaire constituant une donnée caractéristique du microscope.

β) Calculer $\overline{F_1A}$ en fonction de Δ , N et f_1' . Calculer également le grandissement Γ_1 de l'objectif dans les mêmes conditions.

Application numérique : calculer $\overline{F_1A}$ et Γ_1 avec $\Delta = 180$ mm ; $f_1' = 4$ mm ; N = 1,515.

III.2. Un rayon lumineux issu de A et faisant l'angle u avec l'axe ressort de l'objectif en passant par A_1 et en faisant l'angle u_1 avec l'axe. On admettra que, contrairement à l'angle u , u_1 reste toujours petit. On admettra également que la condition d'aplanétisme pour l'objectif se traduit par la relation :

$$N \text{ AB } \sin u = A_1 B_1 \sin u_1 \approx A_1 B_1 u_1.$$

a. Tous les rayons lumineux issus de A situés à l'intérieur de cône de sommet A et de demi-angle au sommet u_m traversent le plan focal image de l'objectif à l'intérieur d'un cercle de rayon R.

Exprimer R en fonction de f'_1 et Ω_n .

b. Calculer le rayon r du faisceau cylindrique formé par les rayons lumineux issus de A et sortant de l'oculaire. On exprimera r en fonction de f'_1 , f'_2 , Ω_n et Δ . On suppose que l'oculaire n'obture aucune partie de la lumière sortant de l'objectif.

c. Tout se passe, en fait, comme si les rayons sortant de l'objectif étaient diaphragmés par une ouverture circulaire de rayon R, centrée en F'_1 et située dans le plan focal image de l'objectif.

Montrer que tous les rayons issus d'un objet étendu perpendiculaire à l'axe et sortant de l'instrument sont ainsi astreints à traverser un disque (appelé disque oculaire), de centre C, dont on calculera la position et le rayon r_c . Où doit-on placer l'œil pour recevoir le maximum de lumière ? On supposera dans la suite cette condition satisfaisante.

Application numérique : calculer r_c et la distance $F'_2 C$.

$$f'_1 = 4 \text{ mm}; f'_2 = 20 \text{ mm}; \Delta = 180 \text{ mm}; N = 1,515; u_m = 70^\circ.$$

III.3. a. Qu'appelle-t-on distance minimale de vision distincte de l'œil ? On notera δ cette distance.

b. L'objet AB, placé à la distance δ de l'œil, c'est-à-dire dans les meilleures conditions d'observation à l'œil nu, est vu ainsi sous un angle θ .

Soit θ' l'angle sous lequel on voit l'objet à travers le microscope. On appelle grossissement du microscope le rapport $G = \theta'/\theta$. Calculer G en fonction de f'_1 , f'_2 , Δ et δ .

Application numérique : calculer G.

$$f'_1 = 4 \text{ mm}; f'_2 = 20 \text{ mm}; \Delta = 180 \text{ mm}; \delta = 250 \text{ mm}.$$

c. Exprimer r_c , le rayon du disque oculaire, en fonction de Ω_n , δ et G. Comparer r_c au rayon ρ_0 de la pupille de l'œil et calculer pour quelle valeur G_c de G ces deux rayons sont égaux.

Exprimer G_c en fonction de Ω_n , δ et ρ_0 .

Comment définir un rayon utile ρ_u de la pupille ? En supposant ρ_0 constant, représenter les variations de ρ_u en fonction de G.

Application numérique : calculer G_c .

On ajoute aux données précédentes : $\rho_0 = 2,5 \text{ mm}$.

III.4. On compare les éclaircissements des images rétinienne, d'une part de l'objet regardé directement à l'œil nu, d'autre part de l'objet regardé à travers l'instrument.

a. Ces images sont supposées recouvrir une certaine étendue rétinienne (grande devant les « grains » de la rétine). Comment l'éclaircissement d'une image rétinienne dépend-il de la quantité de lumière reçue et, pour une quantité de lumière reçue donnée, de l'aire de l'image rétinienne ?

b. La **clarté** C mesure la performance du microscope à cet égard :

$$C = \frac{\tau}{N^2} \left(\frac{\rho_u}{\rho_0} \right)^2$$

où τ est un coefficient ($0 < \tau < 1$) appelé coefficient de transmission qui tient compte des pertes de lumière.

a) À quels phénomènes attribuez-vous les pertes de lumière dans l'instrument ? Comment diminuer ces pertes ?

β) Expliquer la présence de chacun des termes τ , $\left(\frac{\rho_u}{\rho_0} \right)^2$ et $\frac{1}{N^2}$.

- γ) Étudier comment varie C en fonction du grossissement G en distinguant $G < G_c$ et $G > G_c$ (voir. III.3.c.). Tracer le graphe correspondant.

Application numérique : calculer C .

$\rho_0 = 2,5 \text{ mm}$; $\tau = 0,70$; les autres données numériques sont inchangées.

Conclure sur l'importance de l'ouverture numérique et le rôle du condenseur.

- III.5. a. Rappeler en quoi consiste le phénomène de diffraction de la lumière. On précisera le rôle des dimensions de l'objet ou de l'ouverture diffractants.
- b. En ce qui concerne le microscope, tout se passe comme si la lumière était diffractée par le diaphragme de rayon R situé dans le plan focal image de l'objectif (voir III.2.). On admettra que pour toute lumière monochromatique de longueur d'onde λ , la lumière est pratiquement toute diffractée dans une tache qui vue de F'_1 a une demi-largeur angulaire θ_d (fig. 9) :

$$\theta_d = 0,6 \frac{\lambda}{R}.$$

Calculer le rayon r_d , dans le plan focal objet de l'oculaire, de la tache de diffraction correspondant au point objet A.

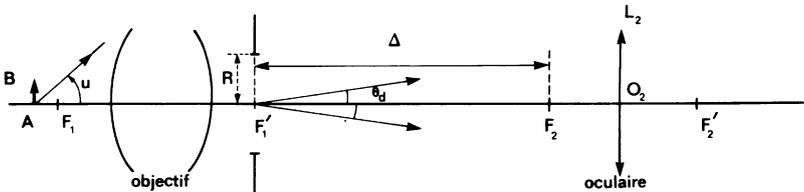


Figure 9

- c. On considère qu'il y a séparation entre deux points A et B si la distance des centres des taches de diffraction est au moins égale au rayon d'une tache de diffraction. En déduire la distance S_d , dans le plan objet du microscope, correspondant à la plus petite distance de deux points objets A et B séparables. Exprimer S_d en fonction de λ et de Ω_n . Expliquer l'intérêt d'une grande ouverture numérique et de l'utilisation possible d'un objectif à immersion.

Application numérique : calculer S_d .

$$\lambda = 0,55 \mu\text{m} ; N = 1,515 \text{ pour cette valeur de } \lambda ; u_m = 70^\circ.$$

- III.6. a. Du fait de la structure granulaire de la rétine, l'œil n'est capable de distinguer deux points que si leur écart angulaire dépasse une valeur minimale α_0 appelée **pouvoir séparateur** de l'œil. Exprimer en fonction de Ω_n , α_0 , δ et λ , le grossissement minimal G_d du microscope tel que ce soit effectivement la diffraction qui limite le pouvoir séparateur de l'instrument visuel.

Application numérique : calculer G_d .

$$\lambda = 0,55 \mu\text{m} ; \delta = 250 \text{ mm} ; \alpha_0 = 3 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

- b. En réalité, α_0 n'est pas constant. Pour un éclairement et un contraste donnés de l'objet, α_0 dépend en outre du rayon utile ρ_u . On constate que le produit $P = \alpha_0 \rho_u$ dépend de ρ_u et passe par un minimum P_m pour une valeur ρ_{om} de ρ_u . Calculer, en fonction de Ω_n et de P , le pouvoir séparateur $S_o = (AB)$, du microscope dû à l'œil. On supposera $G > G_c$ en expliquant ce choix. Quel est le pouvoir séparateur optimal S_{om} ?

Application numérique : on donne $\rho_{om} = 0,6 \text{ mm}$; $P_m = 3 \times 10^{-4} \text{ mm} \cdot \text{rad}$.

Calculer S_{om} ainsi que le grossissement correspondant. Comparer à S_d calculé en II.5.c. Conclure quant au choix de l'ouverture numérique et du grossissement.

- III.7. Quel est le principe de la microscopie électronique ? Connaissez-vous la raison de l'emploi d'un microscope électronique à la place du microscope optique ?