

Corrigé du concours général

I. TRAJECTOIRES DE PHASE

A. SYSTÈMES NON DISSIPATIFS

1. Circuit LC.

$$1.1. L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{avec } i = \frac{dq}{dt} \quad \text{donc } \frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0 \left| \right|.$$

ω : pulsation propre.

1.2. Solution :

$$q(t) = q_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow i = \frac{dq}{dt} = -\omega q_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$

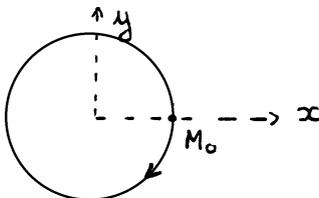
Conditions initiales :

$$t = 0 \quad q(0) = q_0 \quad \text{et} \quad i(0) = 0 \quad \text{donc} \quad \varphi = 0 \quad \text{et} \quad q_1 = q_0.$$

$$q(t) = q_0 \cos \omega t$$

$$\text{et} \quad i(t) = -\omega q_0 \sin \omega t \Rightarrow y(t) = \frac{1}{\omega} \frac{dq}{dt} = -q_0 \sin \omega t.$$

$x^2 + y^2 = q_0^2 \left| \right|$ équation d'un cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon $|q_0|$.



$$t = 0 \quad M_0 \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en prenant } q_0 > 0.$$

2. Circuit LC et diode.

$$2.1. \quad L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} + u = 0 \quad \Bigg| \Bigg| .$$

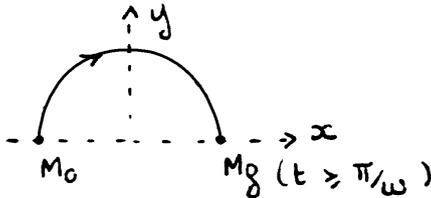
2.2. Si la diode est bloquée : $i = 0$ et $u < 0$ on a alors $\frac{q}{C} + u = 0$ ce qui n'est pas vérifié juste après la fermeture de l'interrupteur puisque $q(t=0) = q_0 < 0$.

\Rightarrow diode passante juste après la fermeture. On a alors $u = 0$ et $\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0$ qui s'intègre en $q(t) = q_0 \cos \omega t$, d'où $i(t) = -\omega q_0 \sin \omega t$.

Valable tant que $i(t) > 0 \Leftrightarrow \omega t < \pi$.

La diode est passante pendant un intervalle de temps de π/ω puis elle se bloque en $\begin{cases} q(t) = -q_0 > 0 \\ i(t) = 0 \end{cases}$

2.3. Trajectoire de phase : 1/2 cercle (diode passante : $x^2 + y^2 = q_0^2$) limité au point $M_f(-q_0, 0)$.



B. SYSTÈMES DISSIPATIFS

1. Circuit RLC.

$$1.1. \quad L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega^2 q = 0 \quad \Bigg| \Bigg| .$$

Q : facteur de qualité.

1.2. Vérification.

1.3. Amplitude de q \searrow de façon exponentielle.

1.4.
$$E = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C},$$

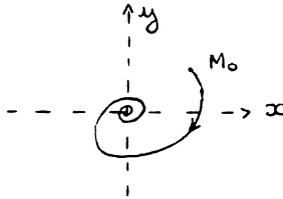
$$\frac{dE}{dt} = L i \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} q i = i \left(L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \right) = -R i^2 < 0 \left| \right|$$

E \searrow quand t \nearrow (effet Joule),

or
$$E = \frac{1}{2C} (x^2 + y^2) = \frac{1}{2C} \|\vec{OM}\|^2 \left| \right|$$

donc M se rapproche de O quand t \nearrow .

1.5. Le sens de parcours est obtenu par continuité à partir du cas $R = 0$.



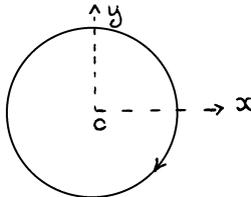
1.6. \forall conditions initiales, le point M tend vers O quand t \nearrow .

2. **Circuit RLC en oscillations forcées.**

2.1. $q(t) = q_{\max} \cos(\Omega t + \Psi) \left| \right|$ en régime permanent.

Pour RLC donné, $q_{\max}(\Omega) \left| \right|$.

2.2. Trajectoire de phase : cercle de rayon $q_{\max}(\Omega) > 0$, centre O .

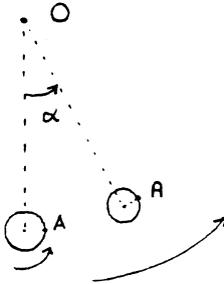


- 2.3. Il faut ajouter les points représentatifs du régime transitoire.
- 2.4. Attracteur : circulaire.

II. MOUVEMENT DES PLANÈTES

A. MOUVEMENT DE LA TERRE

Au jour n , le Soleil se lève lorsque l'observateur est en A. Au jour $(n + 1)$, la Terre a tourné d'un angle α dans son mouvement orbital et d'un angle $(2\pi + \alpha)$ dans son mouvement propre lorsque l'observateur voit à nouveau le Soleil se lever.



Pendant T , la Terre fait donc un tour de plus sur elle-même, qu'il n'y a de jours \Rightarrow nombre de tours sur elle-même : 366,256.

$$\text{Jour sidéral} = \frac{T \text{ (jours)}}{366,256} \times 86\,400 \approx 86\,164,1 \text{ s} \quad (23 \text{ h } 56 \text{ mn } 4,1 \text{ s}).$$

B. MOUVEMENT ORBITAL

$$1. \quad \vec{f} = -G \frac{mM_s}{r^3} \vec{OM}.$$

$$2. \quad \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{f} = \vec{M}_{O(\vec{f})},$$

$$\vec{M}_{O(\vec{f})} = \vec{O} \quad \text{car } \vec{f} // \vec{OM} \Rightarrow \vec{\sigma}_O = \vec{cst}.$$

$$3. \quad \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{cst} \quad \text{donc } \vec{OM} \text{ et } \vec{v} \perp \vec{cst} \Rightarrow \text{trajectoire plane.}$$

$$4. \quad \vec{\sigma}_O = r \vec{u}_r \wedge m \left(\frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \right),$$

$$\vec{\sigma}_O = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{k} \quad \left\| \quad \vec{k} = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta \right.$$

$$\vec{\sigma}_O = \vec{cst}, m \text{ et } \vec{k} \text{ aussi} \Rightarrow r^2 \frac{d\theta}{dt} = C \quad \left\| \quad \text{cste.} \right.$$

$$5. \quad \vec{f} = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_r \quad \text{se vérifie aisément.}$$

Signe – dans E_p : permet d'avoir des systèmes liés ($E < 0$) :

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r) = \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) + E_p(r),$$

$$\text{soit :} \quad E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{mC^2}{r^2} + E_p(r).$$

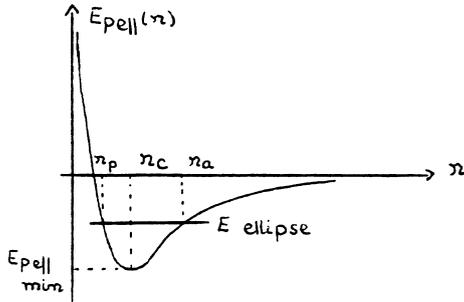
$$E_{p \text{ eff}}(r)$$

Tout se passe comme si on avait une particule fictive de masse m , de vitesse $\frac{dr}{dt}$, dans $E_{p \text{ eff}}(r)$.

6.

6.1.
$$E_{p \text{ eff}}(r) = \frac{1}{2} \frac{mC^2}{r^2} - G \frac{mM_S}{r},$$

$$\frac{dE_{p \text{ eff}}}{dr} = -\frac{mC^2}{r^3} + \frac{GmM_S}{r^2}.$$



6.2. Trajectoire circulaire : $r = \text{cste} = r_C = \frac{C^2}{GM_S}$ d'énergie totale associée $E = E_{p \text{ eff min}} = -G \frac{mM_S}{2 r_C}$ de signe $-$, ce qui correspond à un état lié.

6.3. r_p : périhélie r_a : aphélie \rightsquigarrow voir schéma,

$$E_{p \text{ eff min}} < E < 0 \Big| \Big|.$$

C. CARACTÉRISATION D'UNE TRAJECTOIRE FERMÉE

1.
$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + E_{p \text{ eff}}(r),$$

$$E_{p \text{ eff}}(r) = E_{p \text{ eff}}(r_C) + (r - r_C) \frac{dE_{p \text{ eff}}}{dr} \Big|_{r_C} + \frac{1}{2} (r - r_C)^2 \frac{d^2E_{p \text{ eff}}}{dr^2} \Big|_{r_C},$$

pour $|r - r_C| \ll r_C,$

or
$$\left. \frac{dE_{P \text{ eff}}}{dr} \right)_{r_C} = 0,$$

donc : $E = E_{P \text{ eff}}(r_C) + \frac{1}{2} m \left(\frac{d(r - r_C)}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} (r - r_C)^2 \left. \frac{d^2 E_{P \text{ eff}}}{dr^2} \right)_{r_C},$

système isolé $\Rightarrow E = \text{cste} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0,$

d'où
$$m \left. \frac{d^2(r - r_C)}{dt^2} + \frac{d^2 E_{P \text{ eff}}}{dr^2} \right)_{r_C} (r - r_C) = 0.$$

..

Cette équation est du type $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ avec $x = r - r_C$ et

$\omega^2 = \left. \frac{1}{m} \frac{d^2 E_{P \text{ eff}}}{dr^2} \right)_{r_C}$ à condition bien sûr que $\left. \frac{d^2 E_{P \text{ eff}}}{dr^2} \right)_{r_C} > 0.$

La période associée est donc $T_r = 2\pi \left\| \frac{m}{\left(\frac{d^2 E_{P \text{ eff}}}{dr^2} \right)_{r_C}} \right\|.$

2. Mouvement circulaire : $m \left. \frac{v_C^2}{r_C} = \frac{dE_P}{dr} \right)_{r_C} \Rightarrow v_C^2 = \left. \frac{r_C}{m} \frac{dE_P}{dr} \right)_{r_C},$

$$T = \frac{2\pi r_C}{v_C} = 2\pi \left\| \frac{m r_C}{\left(\frac{dE_P}{dr} \right)_{r_C}} \right\|.$$

3. Trajectoire fermée : $T = T_r \left\| \right\|$ (cas le plus simple).

4. $E_P(r) = -G \frac{mM_S}{r} :$

c_0 : vitesse finie de la lumière dans le vide - intervient en relativité - en mécanique classique, $c_0 \rightarrow +\infty$, comme Δw est en $1/c_0^2$, $\Delta w \rightarrow 0$ en mécanique classique, ce qui est logique, la correction étant relativiste.

4. 4.1

$$E_P(r) = -G \frac{mM_S}{r} - m \frac{\beta}{r^3},$$

$$E_{P \text{ eff}}(r) = \frac{1}{2} \frac{mC^2}{r^2} - G \frac{mM_S}{r} - m \frac{\beta}{r^3},$$

$$\frac{d^2 E_{P \text{ eff}}}{dr^2} = \frac{3mC^2}{r^4} - \frac{2GmM_S}{r^3} - 12 \frac{m\beta}{r^5},$$

or r_C est défini par : $\left. \frac{dE_{P \text{ eff}}}{dr} \right|_{r_C} = 0,$

$$\frac{dE_{P \text{ eff}}}{dr} = -\frac{mC^2}{r^3} + \frac{GmM_S}{r^2} + \frac{3m\beta}{r^4},$$

ainsi $\frac{mC^2}{r_C^3} = \frac{GmM_S}{r_C^2} + \frac{3m\beta}{r_C^4},$

$$\left. \frac{d^2 E_{P \text{ eff}}}{dr^2} \right|_{r_C} = \frac{1}{r_C} \left(\frac{GmM_S}{r_C^2} - 3 \frac{m\beta}{r_C^4} \right) = \frac{GmM_S}{r_C^3} \left(1 - 3 \frac{\beta}{GM_S r_C^2} \right),$$

d'où : $T_r^2 = \frac{4\pi}{GM_S} r_C^3 \left(1 + \frac{3\beta}{GM_S r_C^2} \right)$ puisque $\frac{\beta}{r_C^2 GM_S} \ll 1,$

$$\frac{dE_P}{dr} = \frac{GmM_S}{r^2} + \frac{3m\beta}{r^4} \Rightarrow \left. \frac{dE_P}{dr} \right|_{r_C} = \frac{GmM_S}{r_C^2} \left(1 + \frac{3\beta}{GM_S r_C^2} \right),$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S} r_C^3 \left(1 - \frac{3\beta}{GM_S r_C^2} \right).$$

Conclusion : $T_r = T \left(1 + \frac{3\beta}{GM_S r_C^2} \right) \Big| \Big|$ à l'ordre le plus bas.

- 4.2. $T_r > T$: Mercure doit faire plus d'un tour sur son orbite pour retrouver la même valeur de r , ce qui correspond effectivement à une avance du périhélie. La trajectoire n'est plus fermée.

$$\Delta w = 2\pi \left(\frac{T_r}{T} - 1 \right),$$

soit :

$$\Delta w = 6\pi \frac{\beta}{GM_S r_C^2},$$

en prenant pour $\beta = \frac{C^2}{c_0^2} GM_S$, $\Delta w = 6\pi \frac{C^2}{c_0^2 r_C^2}$,

or $C =$ valeur calculée dans le cas circulaire $= r_C v_C$

$$C^2 = r_C^2 v_C^2 \text{ à l'ordre le plus bas : } v_C^2 = \frac{GM_S}{r_C},$$

donc :

$$\Delta w = 6\pi \frac{GM_S}{c_0^2 r_C} \left| \right|.$$

Δw est bien de la forme attendue, la cste sans dimension valant 6π .

- 4.3 $\Delta w \approx 4,82 \cdot 10^{-7}$ rd / révolution soit 41,3" arc / siècle.

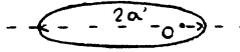
Le résultat obtenu est tout à fait correct, sachant que l'excentricité de Mercure n'est pas très faible.

E. LA TROISIÈME LOI DE KEPLER

1. Mouvement circulaire : $m \frac{v_C^2}{r_C} = m \frac{GM_S}{r_C^2} \Rightarrow v_C^2 = \frac{GM_S}{r_C}$,

et $T = \frac{2\pi r_C}{v_C}$ d'où $\frac{r_C^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2} \left| \right|.$

2. En supposant que la Terre garde une vitesse tangentielle petite au lieu d'être complètement stoppée, sa trajectoire ultérieure sera une ellipse très aplatie de 1/2 grand axe a' et de période T' .



Troisième loi de Kepler : $\frac{a'^3}{T'^2} = \frac{a^3}{T^2}$
 ↑ valeurs actuelles

si elle est stoppée : $a' = \frac{a}{2}$ et donc $T' = T \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}$. Le temps qu'elle mettrait pour tomber sur le Soleil vaut alors $T'/2$ soit $T \times \frac{1}{4\sqrt{2}}$, numériquement $\approx 64,569$ jours.

3. 3.1. $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2} \Rightarrow$ pour la Terre : $a_{\text{Terre}} \approx 150$ millions de kilomètres, pour une autre planète : $a_{\text{planète}} = a_{\text{Terre}} \left(\frac{T_{\text{planète}}}{T_{\text{Terre}}}\right)^{2/3}$.

	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune	Pluton
a en u.a.	0,387	0,723	1	1,524	5,202	9,580	19,141	30,138	39,440

3.2. $\frac{a_{\text{Vénus}}}{a_{\text{Mercure}}} \approx 1,868$ $\frac{a_{\text{Terre}}}{a_{\text{Vénus}}} \approx 1,383$ $\frac{a_{\text{Mars}}}{a_{\text{Terre}}} \approx 1,524$
 $\frac{a_{\text{Jupiter}}}{a_{\text{Mars}}} \approx 3,413$ $\frac{a_{\text{Saturne}}}{a_{\text{Jupiter}}} \approx 1,842$ $\frac{a_{\text{Uranus}}}{a_{\text{Saturne}}} \approx 1,998$ $\frac{a_{\text{Neptune}}}{a_{\text{Uranus}}} = 1,575$

Le rapport $\frac{a_{\text{planète}} n^0 n}{a_{\text{planète}} n^0 (n - 1)}$ est compris entre 1,38 et 2,00 si on excepte la valeur 3,413. En fait, il existe entre Mars et Jupiter la ceinture d'astéroïdes dont l'origine est probablement l'explosion d'une planète.

III. DU CHAOS DANS LA CEINTURE D'ASTÉROÏDES

1. Masse + ressort.

2. **A l'intérieur de (S)** : mouvement oscillatoire. Si le mouvement a une faible amplitude, la trajectoire de phase est un cercle \rightarrow caractère sinusoïdal des oscillations.

A l'extérieur de (S) : la masse effectue des révolutions.

3. Parabole.

4. 4.1. e^2 est proportionnel à $x^2 + y^2$ $\left(e^2 = \frac{1}{k^2} (x^2 + y^2) \right)$.

$$4.2. \theta_{\text{Jupiter}} = \theta_{\text{Jupiter}_0} + 2\pi \frac{t}{T_{\text{Jupiter}}},$$

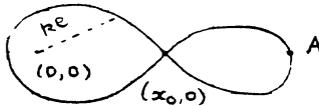
$$\theta_{\text{astéroïde}} = \theta_{\text{astéroïde}_0} + 2\pi \frac{t}{T_{\text{astéroïde}}},$$

$$\text{or : } T_{\text{Jupiter}} = 3 T_{\text{astéroïde}} \quad \text{donc : } \varphi = 3\theta_{\text{Jupiter}_0} - \theta_{\text{astéroïde}_0}$$

φ est constant

4.3. Au voisinage de $(x_0, 0)$, la forme de $E_{P \text{ eff}}$ est effectivement une selle de cheval. Le point $(x_0, 0)$ est un extremum local maximal en ce qui concerne les variations de y . Par analogie, on parle de point «d'équilibre instable», bien qu'ici la notion d'équilibre ne corresponde pas du tout à un quelconque mouvement possible.

4.4.



en coupant par $E_{P \text{ eff}}(x, y) = E_0$.

4.5. Si l'orbite de l'astéroïde reste dans la partie gauche, e est faible. Mais si, grâce au chaos, elle se retrouve dans la partie droite, e devient beaucoup plus grande (A est le point où e est maximale). On parle alors de saut d'excentricité.

4.6. Lorsque e devient grande, l'orbite s'aplatit. Elle peut venir couper celle de Mars. Sur de grands intervalles de temps, la

probabilité d'un grand rapprochement entre l'astéroïde et Mars devient importante. L'astéroïde change alors de trajectoire. Il est perdu pour la ceinture d'astéroïde → lacune.

- 4.7. Certains astéroïdes peuvent croiser l'orbite terrestre → météorites.

BIBLIOGRAPHIE

- Sur les trajectoires de phase :

«Le portrait de phase des oscillateurs» par H. GIÉ et J.-P. SARMANT - B.U.P. n° 744 - mai 1992.

- Sur le chaos :

– «Le chaos dans le système Solaire» par J. LASKAR - La Recherche n° 232 - mai 1991 - volume 22.

– «Chaos et déterminisme» sous la direction de A. DAHAN DALMEDICO, J.-L. CHABERT, K. CHEMLA - Points Sciences - Éditions du Seuil.

COMMENTAIRE

Le 9 octobre 1992, une météorite de 12,4 kg, de type chondrite, chutait à Peekskill aux U.S.A. L'excentricité de sa trajectoire est estimée à 0,41 et on suppose raisonnablement qu'elle provient de la ceinture d'astéroïdes.

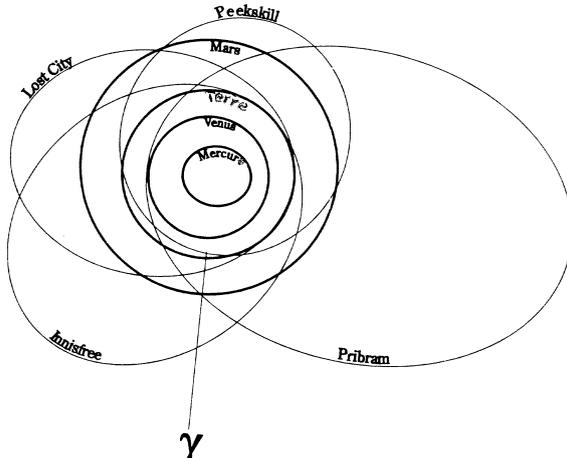


Figure : Orbites de la météorite Peekskill et des trois précédentes (Lost City, Pribram et Innis Free), déterminées photographiquement, γ est le symbole du point vernal (D'après Nature n° 367 - 17 février 1994).