TD n°4

Algorithmique : de la récursivité

I En s'appuyant sur le modèle de la fonction addition vue en cours, écrire :

1) la fonction `mul` : N x N -> N de multiplication des nombres entiers
```
> (mul  3 5)
15
```
2) la fonction `puis` : N x N -> N d'élévation à la puissance
```
> (puis 2 4)
16
>(puis  3 5)
243
```

II Ecrire les fonctions qui font les calcul suivants :

1) la fonction `somme` qui calcule la somme des nombres $1 + 2 + 3 \quad + 4 + \ldots\ldots + n$
```
> (somme  6)
21
```

2) la fonction `somme_carre` qui calcule la somme des nombres $1^2 + 2^2 + 3^2 \quad + 4^2 + \ldots\ldots + n^2$
```
> (somme_carre  6)
91
```

3) la fonction `carre_somme` qui calcule le carré de la somme des n premiers entiers soit :
$(1 + 2 + 3 \quad + 4 + \ldots\ldots + n)^2$ **sans utiliser la fonction somme de la question 1)**
```
> (carre_somme  6)
441
```

4) On peut remarquer que les fonctions somme et somme_carre ont exactement la même forme. Ecrire une fonction somme_gene permettant de passer en argument la nature de l'opération à faire sur n.
```
> (somme_gene   identite  6) ; avec (define (identite n) n)
21
> (somme_gene   carre  6) ; avec  (define (carre n) (* n n))
91
> (somme_gene   cube  6) ; avec  (define (cube n) (* n n n))
441
```
…. Montrer alors que $1^3 + 2^3 + 3^3 \quad + 4^3 + \ldots\ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n)^2$

5) la fonction `Leibniz` qui calcule la somme des nombres $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$

a) avant d'écrire la définition , que vaut :
`(Leibniz 0)` ? `(Leibniz 1)` ? `(Leibniz 2)` ?
`(- (Leibniz 1) (Leibniz 0))` ? `(- (Leibniz 2) (Leibniz 1))` ?
b) que vaut la différence `(- (Leibniz n )(Leibniz (1- n) ))` ?
c) écrire la fonction Leibniz puis - après avoir vérifié que son écriture est correcte !- évaluer l'expression `(* 4 (Leibniz 100))` : Le résultat est-il original ?

6) la fonction `somme_racine` qui calcule l'expression : $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots \sqrt{n}}}}$

Idée : il peut être utile d'écrire d'abord la fonction `(somme_racine_partielle p n)` *qui calcule :*

$$\sqrt{p + \sqrt{(p+1) + \ldots \sqrt{n}}}$$